

# الرياضيات الشاملة

المجموعات والاعداد  
النسبة والتناسب

صالح رشيد بطارسة







# الرياضيات الشاملة

★ المجموعات والأعداد

★ النسبة والتناسب

تأليف

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر  
دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن - عمان

- هاتف : 5658252 - 5658253
- فاكس : 5658254
- العنوان : العبدلي - مقابل البنك العربي

ص.ب : 141781

Email: [darosama@orange.jo](mailto:darosama@orange.jo)  
[www.darosama.net](http://www.darosama.net)

حقوق الطبع محفوظة

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية  
(2013/6/2214)

510

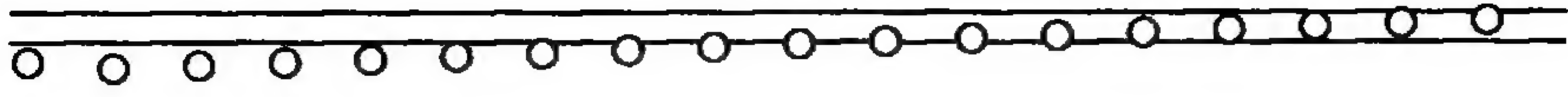
بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة. - عمان : دار أسامة  
للنشر والتوزيع ، 2013.  
( ) ص.

ر.أ : (2013/6/2214).

الوصفات : الرياضيات /

ISBN: 978-9957-22-385-4



## الفهرس

المحتويات	الصفحة
الفهرس . . . . .	٢
المقدمة . . . . .	٧
المجموعات والأعداد . . . . .	١١
(١ - ١) المجموعة Set . . . . .	١٣
(٢ - ١) طرق كتابة المجموعة . . . . .	١٧
طريقة القائمة List method . . . . .	١٧
طريقة القاعدة Law method . . . . .	١٧
(٣ - ١) اشكال فن أو (مخططات فن) Venn Diagrams . . . . .	٢٠
(٤ - ١) المجموعات العددية Number Sets . . . . .	٢٠
مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers . . . . .	٢٠
مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers . . . . .	٢١
مجموعة الأعداد الصحيحة Integers Numbers . . . . .	٢١
مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers . . . . .	٢١
مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers . . . . .	٢١
مجموعة الأعداد المركبة Complex Numbers . . . . .	٢٢
(٥ - ١) المجموعة الخالية Empty Set, Null Set . . . . .	٢٢
(٦ - ١) المجموعات المنتهية وغير المنتهية Finite and Infinite Sets . . . . .	٢٣
(٧ - ١) الاحتواء والمساواة Inclusion and Equality . . . . .	٢٤
(٨ - ١) المجموعة الكلية أو الشاملة Universal Set . . . . .	٢٨

٢٩	Algebraic Sets	جبر المجموعات (٩ - ١)
٢٩	Intersection	عملية التقاطع
٣٢	Union	عملية الاتحاد
٣٨	Difference	عملية الفرق
٤٠	Symmetric Difference	عملية الفرق التناظري
٤٢	Complement	عملية الاتمام
٤٦		أمثلة محلولة على جبر المجموعات
٤٩	Ordered Pairs	(١٠ - ١) الأزواج المرتبة
٥٤	Relations	(١١ - ١) العلاقات
٥٤		العلاقة الأحادية
٥٤	Binary Relation	وأما العلاقة الثنائية
٥٨		بطريقة الأزواج المرتبة
٥٨		بطريقة المخطط السهي هكذا
٥٩		بطريقة المخطط السهي العددي هكذا
٦٠	Functions	(١٢ - ١) الاقترانات
٦٠	Constant Function	الاقتران الثابت
٦١	Identity Function	الاقتران المحايد
٦٢	Onto Function	اقتران شامل
٦٢	One- one Function	اقتران واحد لواحد
٦٢	One- one and Function	اقتران تناظر
٦٣	Mathematical Systems	(١٣ - ١) الأنظمة الرياضية
٦٦	Groups	(١٤ - ١) الزُمر
٦٨	Rings	(١٥ - ١) الحلقات



٧٨	ضرب الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة Integer Ring
٧٩	قسمة الأعداد الصحيحة في حلقة الأعداد الصحيحة
٨٠	العامل Divisor أو القاسم
٨١	العدد الأولي Prime Number
٨٤	القاسم المشترك الأكبر Highest Common Factor (H.C.F)
٨٧	المضاعف المشترك الأصغر Lowest Common multiple
٨٩	(١ - ١٦) الحقول Field
٨٩	حقل الأعداد النسبية Rational Field
٩٩	أمثلة محلولة
١٠٣	التمثيل العشري للأعداد النسبية في
١٠٦	حقل الأعداد الحقيقية Real Field
١٠٨	علامة الترتيب في حقل الأعداد الحقيقية
١١٢	الجزور Roots في حقل الأعداد الحقيقية
١١٢	المربع الكامل Complete Square
١١٤	الطريقة التقريبية
١١٦	المكعب الكامل Complete Cubic
١٢٢	هناك ما يسمى انطاق المقام Rationalizing the Denominator
١٢٤	الفترات في حقل الأعداد الحقيقية
١٢٤	الفترات المحدودة
١٢٨	(١ - ١٧) أمثلة محلولة على المجموعات والأعداد
١٤٢	(١ - ١٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين
١٤٢	المجموعات والأعداد
١٤٢	اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها

١٧٣	Ratio النسبة (١ - ٢)
١٧٤	Ratio النسبة (١ - ٢)
١٧٥	Ratio النسبة (٢ - ٢)
١٧٧	Percentage النسبة المئوية (٣ - ٢)
١٧٩	Proportion التناسب (٤ - ٢)
١٨٢	نوعا التناسب
١٨٢	تناسب طردي Direct Proportion
١٨٣	تناسب عكسي Inverse Proportion
١٨٤	قوانين التناسب
١٨٧	Scale Drawing مقياس الرسم (٥ - ٢)
١٨٨	Proportional Division التقسيم التناسبي
١٩٣	(٦ - ٢) أمثلة محلولة على النسبة والتناسب
١٩٩	(٧ - ٢) أسئلة وتدرجات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين





## المقدمة

بعد الاتكال على الله ، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفرد للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلا أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلف من البشر.

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- ~ الرياضيات إن كنت لا تدري تُثمي الذكاء وتُشدُّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).
- ~ الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالبغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.
- ~ فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة، ، ، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختتم على ذلك بقولنا آمين!...

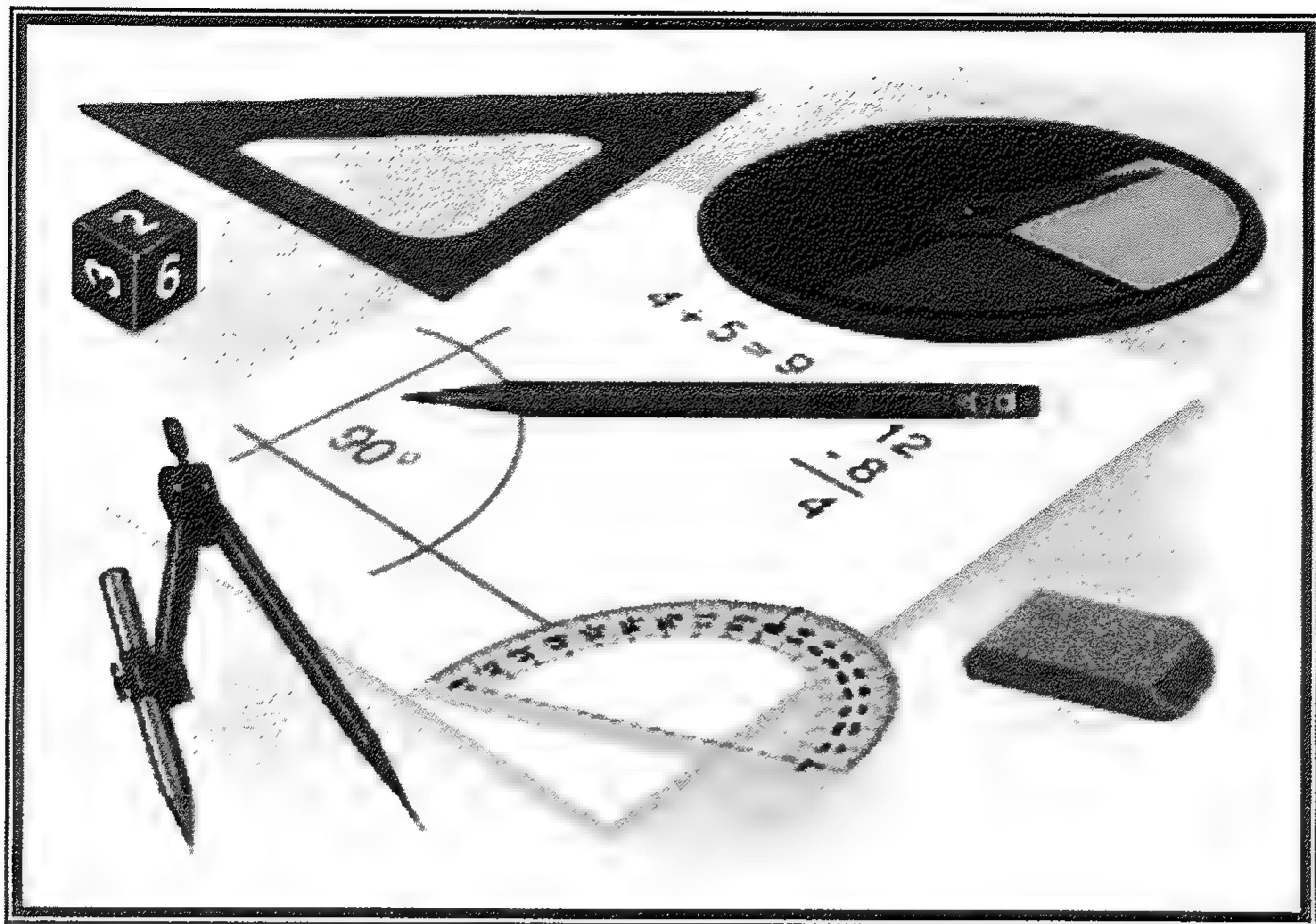


## تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة  
منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا  
استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات  
الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واثقان، وبالسرعة  
التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف



1.

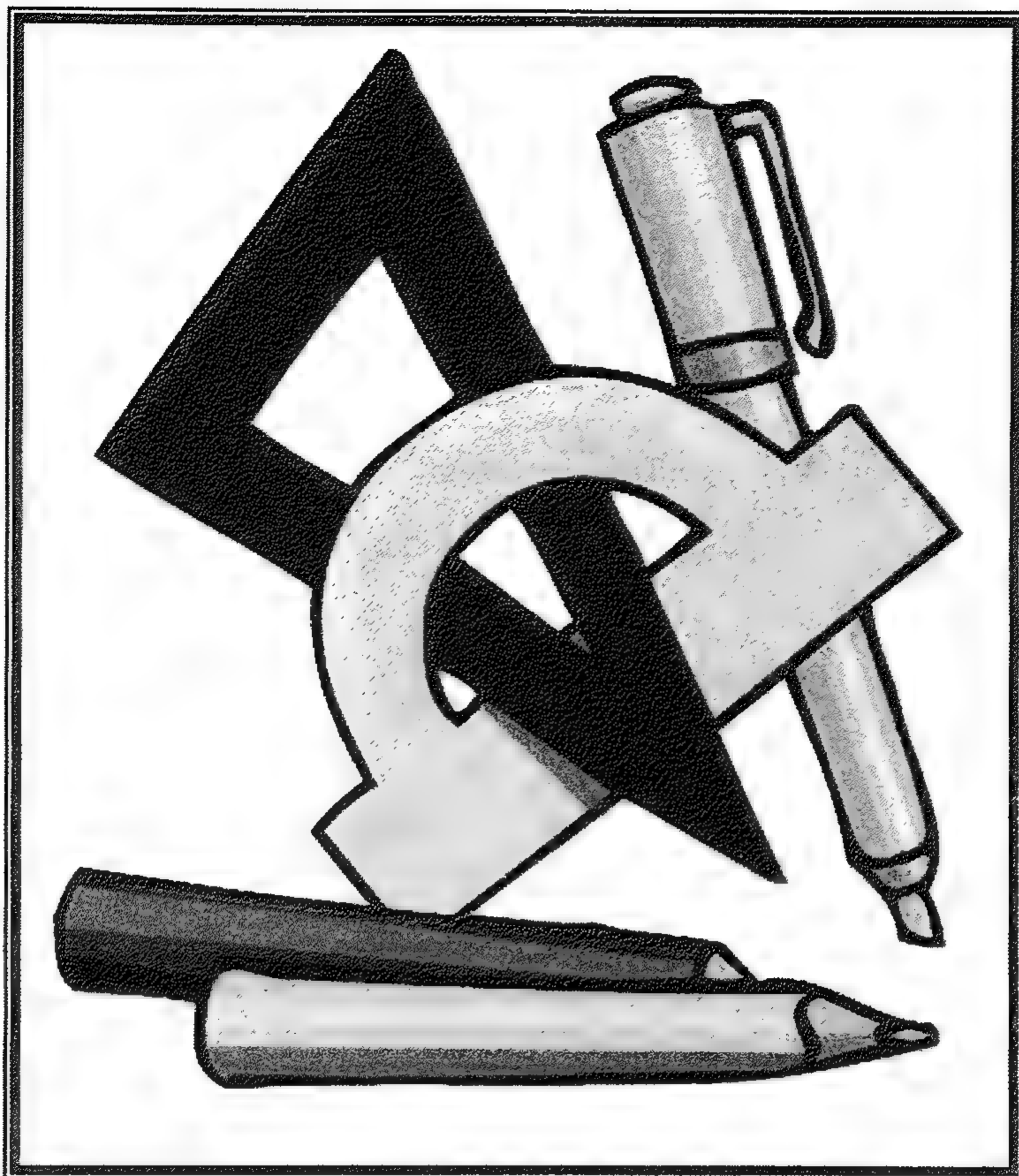




المجموعات والأعداد

Sets and Numbers









## (١ - ١) المجموعة Set:

قال مدرسٌ لطلابه في أحد الفصول الدراسية ما مفاده:

أيها الطلبة:

عندما نتحدث عن نخبة من العلماء والذين كانوا على قيد الحياة ثم اختارهم الله، فإننا نتحدث عن مجموعة منهم.

وعندما نُهدي صديقَ العمر باقة من الورد، فإننا نهديه مجموعة منها.

ثم عندما نُشاهد سرباً من الحمام يحلّق في عنان السماء، فإننا نشاهد مجموعة منه.

فكلمة نخبة وكلمة باقة وكلمة سرب وغيرها من الكلمات المطابقة لها بالمعنى والمضمون، تسمى مجموعة...

فالمجموعة: تجمع من مفردات مميزة ومحددة بكل دقة واثقان، دون ترتيب أو تكرار.

وهذه المفردات يمكن أن تمثل أشخاصاً أو حيوانات أو أوراقاً أو حروفاً أو أعداداً، وتسمى عناصر المجموعة، وكلٌّ منها يسمى عنصراً Element في المجموعة.

يُعتبر العالم الألماني كانتور Cantor (١٨٤٥ - ١٩٠٨) م أول من أوجد المجموعات واعتبرها من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، إذ أسبغ عليها فيضاً من الميزات، نوجزها بما هو آت:

♦ كون المجموعة كائناً رياضياً مستقلاً، فإن مفهومها يختلف عن مفهوم العناصر المكونة لها، فعند الحديث عن فرقة من الجنود حتى ولو كانت لا تضم هذه الفرقة إلا جندياً واحداً فقط، فإن حديثنا عنها يختلف عن حديثنا عن الجندي كفرد واحد، كوننا نتحدث عن مجموعة وليس عن فرد أبداً.



♦ ولأن عناصر كل مجموعة متميزة عن غيرها من المجموعات الأخرى فإنه لا داعي لتكرار أي عنصر فيها، مجموعة أرقام العدد ٤٦٤٥٥ هي الأرقام ٥ ، ٤ ، ٦ فقط، فالتكرار في المجموعة غير مسموح به على الإطلاق.

♦ ثم إن ترتيب عناصر المجموعة لا يؤثر على طبيعتها لا من قريب ولا من بعيد، ولا يُنقص من أهميتها ولا يزيد. فمجموعة الحروف المكونة لكلمة "مجموعة" هي الحروف التالية: ج ، م ، و ، ة ، ع بلا ترتيب، علماً بأن ترتيب العناصر في المجموعة أفضل بكثير من عدم ترتيبها لتظهر مجموعة الحروف على الشكل التالي: م ، ج ، و ، ع ، ة.

♦ وأخيراً كون المجموعة محددة ومعينة تعيناً تاماً، فالرجال الشجعان في أي بلدٍ كان لا يمكن أن يكونوا مجموعة كون وصف فرد بالشجاعة يختلف من شخص لآخر. في حين أن الدول العربية الأعضاء في جامعة الدول العربية تكون مجموعة كون هذه الدول معروفة لدى الجميع، ويمكن الرجوع الى سجلات الجامعة للتأكد من أن أي دولة عربية عضو في الجامعة أم لا..

والأمثلة على المجموعات وعناصرها كثيرة بعدد رمل الصحراء أو تزيد، ولكن على سبيل المثال لا الحصر يمكن تدوين بعض المجموعات وعناصرها هكذا:

مجموعة ألوان العلم الأردني وعناصرها: اللون الأسود، اللون الأبيض، اللون الأخضر، واللون الأحمر.

مجموعة أرقام العدد ٥٦٤٥ وعناصرها: الرقم ٥، الرقم ٤ ، والرقم ٦. مجموعة أحرف كلمة سلمى وعناصرها: الحرف س، الحرف ل، الحرف م، والحرف ي.

مجموعة أيام الأسبوع وعناصرها: يوم الأحد، يوم الاثنين، يوم الثلاثاء، ، ، ، يوم السبت.





مجموعة الدول العربية وعناصرها: الأردن، سوريا، مصر، ٠٠٠ ، الصومال.

مجموعة نقط المستقيم  $\leftarrow \overset{a}{x} \overset{b}{x} \rightarrow$  وعناصرها جميع النقط المتراصة بجانب بعضها البعض والتي عددها غير منتهى.

هذا ويستعمل أحد الحروف الهجائية ليرمز الى المجموعة، فإذا ما رمزنا الى مجموعة أيام الأسبوع بالحرف س، ولكون يوم الأحد من أيام الأسبوع، فإن يوم الأحد عنصر من عناصر المجموعة س، لذا يمكن أن نُعبّر عن ذلك بالرموز كما يلي:

يوم الأحد  $\in$  س (الرمز  $\in$  يُقرأ ينتمي الى المجموعة).

بينما شهر شباط ليس من أيام الأسبوع، فهو ليس من عناصر المجموعة س لذا يُعبّر عنه بالرموز هكذا: شهر شباط  $\notin$  س (الرمز  $\notin$  يُقرأ لا ينتمي الى المجموعة).

وبناءً عليه فإن قيم الصواب لما يلي هي كالتالي:

الأردن  $\in$  مجموعة الدول العربية  $\leftarrow$  صواب.

الحرف س  $\in$  مجموعة أحرف ليلي  $\leftarrow$  خطأ، كون الحرف س ليس من حروف كلمة ليلي.

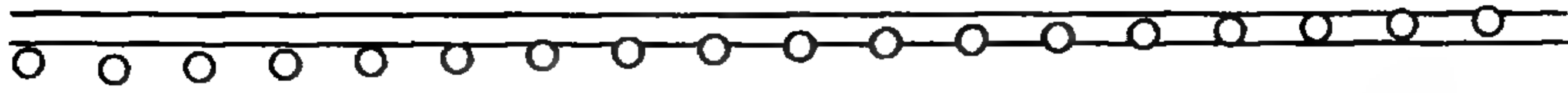
ليبيا  $\notin$  مجموعة الدول الأوروبية  $\leftarrow$  صواب، كونها ليست دولة أوروبية.

الحصان  $\in$  مجموعة الحيوانات الأليفة  $\leftarrow$  صواب.

العدد ٥٦  $\notin$  مجموعة الأعداد الزوجية  $\leftarrow$  خطأ، كون العدد ٥٦ زوجياً.

وهكذا...

فالمجموعة في حقيقة الأمر مفهوم مجرد وكائن رياضي مستقل.



مثال:

اكتب عناصر المجموعات التالية:

♦ مجموعة الاتجاهات الأربعة الأصلية.

الجواب: شمال، جنوب، شرق، غرب.

♦ مجموعة أرقام العدد ٢٥٤٢٣١٥٦

الجواب: ٦ ، ٥ ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ٤

♦ مجموعة حروف كلمة "رياضيات".

الجواب: ر ، ي ، أ ، ض ، ت.

♦ مجموعة عواصم الدول العربية:

الجواب: عمان، دمشق، الخرطوم، ٠٠٠ ، الكويت.

♦ مجموعة فصول السنة:

الجواب: الشتاء، الربيع، الصيف، الخريف.

♦ مجموعة الجامعات الأردنية:

الجواب: الأردنية، اليرموك، التكنولوجيا، ٠٠٠ ، جرش.

♦ مجموعة الطلاب الأذكياء في مدرستك.

الجواب: لا يمكن كتابة العناصر إلا بعد تطبيق اختبار الذكاء عليهم.

♦ مجموعة أعضاء الجهاز التنفسي عند الإنسان.

الجواب: الأنف، القصبة الهوائية، الرئتين، الشعبات الهوائية، الحنجرة.

♦ مجموعة العناصر الكيميائية المكونة للماء.

الجواب: الأكسجين، الهيدروجين.



## (١ - ٢) طرق كتابة المجموعة:

يمكن تعيين المجموعة أو وصفها بطريقتين لا ثالث لهما هما:

### طريقة القائمة List method:

وذلك بذكر جميع عناصرها، لذا تسمى طريقة الحصر، لتعيين المجموعة إذا عُرفت جميع عناصرها، أي إذا كان عدد العناصر محدوداً بذكر جميع هذه العناصر بين حاصرتين أو قوسين على الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين منها، فإذا رمزنا لمجموعة الفصول الأربعة مثلاً بالرمز س فإننا نكتب:

س = {فصل الشتاء، فصل الخريف، فصل الصيف، فصل الربيع}.

وإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة "إنسان" مثلاً بالرمز ص فإننا نكتب:

ص = { أ ، ن ، س } وهكذا.

### طريقة القاعدة Law method:

وذلك بذكر صفة مميزة للعناصر المكونة للمجموعة، لذا تُسمى طريقة الوصف Description method تتعين المجموعة بذكر صفة مشتركة لعناصرها والتي تميزها عن غيرها من المجموعات بشكل واضح ودقيق، وعادة ما تستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد عناصرها كثيرة...

فإذا رمزنا لمجموعة الدول العربية بالرمز س فإننا نكتب:

س = { ص : ص دولة عربية } ونقرأ ص حيث ص دولة عربية.

وإذا رمزنا لمجموعة أرقام العدد ٩٧٨٥٦٣٦٧ بالرمز ص فإننا نكتب:

ص = { ع : ع رقم من أرقام العدد ٩٧٨٥٦٣٦٧ } وهكذا...

هذا ويمكن كتابة المجموعة بالطريقتين ولكن كلاً على انفراد.





مثال:

مجموعة ألوان العلم الأردني:

أ = {اللون الأسود، اللون الأبيض، اللون الأحمر، اللون الأخضر}.

أو:

أ = {س : س لون من ألوان العلم الأردني}.

وكذلك مجموعة أشهر السنة الميلادية هكذا:

م = {شهر كانون الثاني، شهر شباط، شهر آذار، ...، شهر كانون أول}.

أو:

م = {ع : ع شهر من أشهر السنة الميلادية}.

علماً بأن النقط الثلاث (٠٠٠) الواردة أعلاه تعني علامة الحذف في اللغة العربية، أي أن هناك عناصر أخرى لم تذكر مع أنها تنتمي الى المجموعة لعدم الاستيعاب.

ثم كذلك مجموعة الدول العربية في قارة أفريقيا:

ك = {مصر، السودان، الصومال، ...، ليبيا}.

أو:

ك = {ل : ل دولة عربية افريقية}.

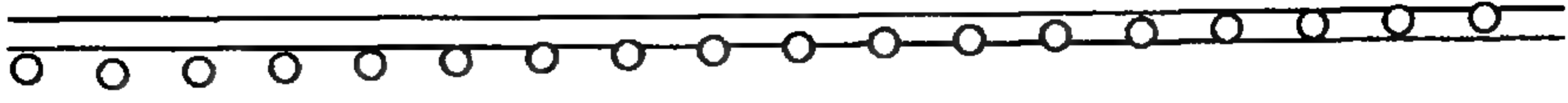
مثال:

اكتب المجموعات التالية بالطريقة التي تراها مناسبة لكل منها:

مجموعة أسماء قارات العالم.

الجواب:

أ = {آسيا، أفريقيا، أوروبا، امريكيتين، أوقيانوسية، القارة المفقودة}.



مجموعة أشهر السنة الهجرية:

الجواب:

هـ = {محرم، صفر، ربيع أول، ٠٠٠، جمادى الثاني}.

مجموعة أرقام العدد ٢٥٣٣٢٤ :

الجواب:

ع = {٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤}.

مجموعة أسماء أصابع اليد الواحدة:

ي = {الإبهام ، الوسطى ، السبابة، البنصر، الخنصر}.

مجموعة عواصم الدول العربية الآسيوية:

ص = { عمان، دمشق، الكويت، ٠٠٠ ، الدوحة}.

مجموعة العناصر المكونة للهواء:

و = {ع : ع عنصر في الهواء}.

مجموعة أجهزة جسم الإنسان:

س = {الهضمي، التنفسي، الدوري، ٠٠٠ ، التناسلي}.

مجموعة محافظات المملكة الأردنية الهاشمية:

م = {عمان، اربد، الكرك، ٠٠٠ ، معان}.

مجموعة أشجار النخيل في بساتين العراق الشقيق:

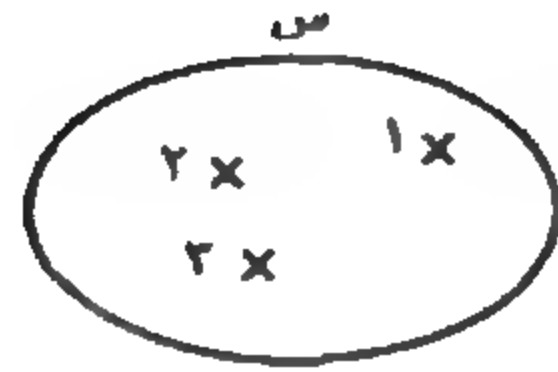
ن = {س : س شجرة نخيل في العراق الشقيق}.



(١ - ٣) اشكال فن أو (مخططات فن) Venn Diagrams :

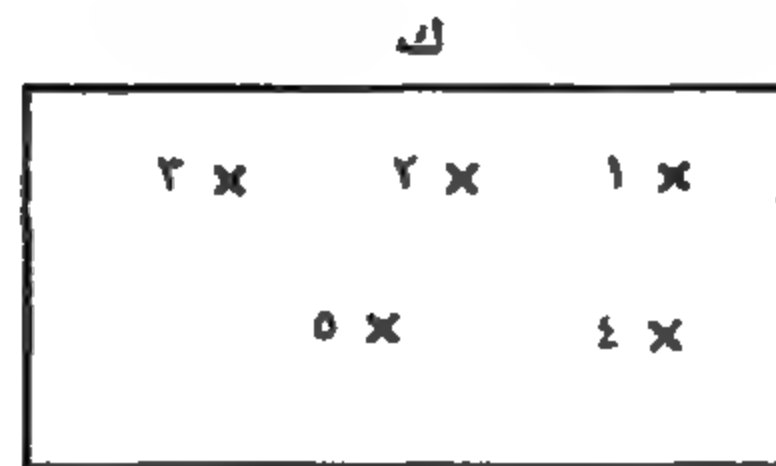
ترتبط هذه الأشكال بالمجموعات بشكل خاص، إذ أنها مخططات وصفها العالم الفرنسي فن Venn (١٨٣٤ - ١٩٢٣) م عام ١٨٨٠ لتوضيح العديد من العمليات على المجموعات، إذ استبدل الحاصرتين أو القوسين  $\{ \}$  بمنطقة محاطة بخط مغلق بسيط كمستطيل أو دائرة أو ما يماثلهما بالشكل، بحيث لا يتقاطع هذا الخط مع نفسه، ويسمى عندها الشكل الذي يمثل المجموعة بهذه الطريقة مخطط فن كما في الأشكال التالية:

المجموعة س =  $\{ ١ , ٢ , ٣ \}$  تمثل هكذا:



حيث العناصر داخل المجموعة تمثل بنقط داخل شكل فن.

والمجموعة ك =  $\{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , ٥ \}$  تمثل هكذا:



وهكذا.....

(١ - ٤) المجموعات العددية Number Sets:

من أكثر المجموعات تداولاً في الرياضيات، يستخدمها معظم الأفراد وعلى وجه الخصوص الطالبات والطلاب، سندونها هنا بشيء من الإيجاز:

\* مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers:

ويرمز لها بالرمز  $\mathbb{N}$  ويكتب هكذا:

$\mathbb{N} = \{ ١ , ٢ , ٣ , ٤ , \dots \}$ .





## المجموعات والأعداد



\* مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers:

ويرمز لها بالرمز ط وتكتب هكذا:

$$\text{ط} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

وتسمى أحياناً مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر.

\* مجموعة الأعداد الصحيحة Integers Numbers:

ويرمز لها بالرمز ص وتكتب هكذا:

$$\text{ص} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

أو هكذا:

$$\text{ص} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

\* مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers:

ويرمز لها بالرمز ك وتكتب هكذا:

$$\text{ك} = \left\{ \frac{أ}{ب} : \text{ص} = \frac{أ}{ب}, \text{أ} \in \text{ص}, \text{ب} \in \text{ص}^* \text{ أي أن } \text{ب} \neq 0 \text{ صفر اطلاقاً} \right\}$$

\* مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers:

ويرمز لها بالرمز ح.

وعناصر هذه المجموعة هي جميع الأعداد السابقة والجذور.

هذا ويمكن تمثيل الأعداد الحقيقية على خط مستقيم يسمى خط الأعداد

الحقيقية، يبدأ من سالب ما لانهاية  $(-\infty)$  وينتهي في اللانهاية  $(\infty)$  كما في

الشكل:





❖ مجموعة الأعداد المركبة Complex Numbers:

ويرمز لها بالرمز  $\mathbb{C}$ .

"وسنناقش فيما بعد ولكن في هذا المؤلف بالذات، وفي الفصل الأخير منه".

والملاحظ أن كل مجموعة عددية تحتوي عناصر المجموعة السابقة لها. أي أن كل مجموعة عددية محتواة في المجموعة اللاحقة لها.

وهكذا:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(١ - ٥) المجموعة الخالية Empty Set, Null Set:

إذا عيّنّا مجموعة ما بصفة مميزة وتبيّنّا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الصفة أي لا تنتمي إلى المجموعة على الإطلاق، فإننا نكون أمام مجموعة لا تحوي أي عنصر من العناصر، نطلق عليها اسم المجموعة الخالية ونرمز لها بالرمز  $\emptyset$  أو  $\{\}$  كونها فارغة من العناصر.

فالمجموعة  $E = \{س : س دولة عربية تقع في قارة أوروبا\}$ ،

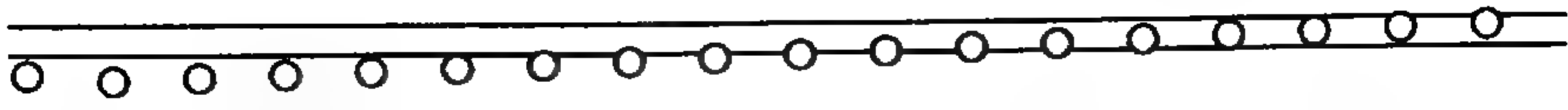
فبعد شيء من التفكير والتمحيص وحسب معلوماتنا الجغرافية فإنه لا يوجد دولة عربية في قارة أوروبا. حيث دولنا العربية منتشرة في قارتي آسيا وأفريقيا فقط. لذا لا يوجد عنصر في هذه المجموعة، من هنا ندعوها المجموعة الخالية. عندها يمكن أن نكتب  $E = \emptyset = \{\}$ .

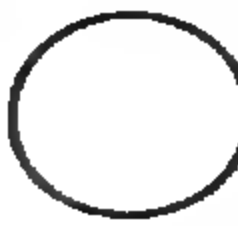
ومثلها بالضبط:

$ص = \{س : س عدد طبيعي فردي محصور بين العددين ٢ ، ٣\}$ .

وحيث أنه لا يوجد بين العددين الطبيعيين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي سواء أكان فردي أو زوجي، فإن  $ص = \emptyset = \{\}$ .





وكذلك مجموعة الأشخاص الذين أطوالهم أكثر من ثلاثة أمتار، مجموعة المثلثات التي لكل منها أربعة أضلاع وغيرها من المجموعات الخالية، وتمثل المجموعة الخالية  $\phi = \{ \}$  بالمخطط  دون وجود عناصر داخلها.

### (١ - ٦) المجموعات المنتهية وغير المنتهية Finite and Infinite Sets:

أصبح من المعلوم أن عدد عناصر المجموعة  $S = \{أ، ب، ج، د\}$  هو أربعة عناصر بالتحديد. في حين أن عدد عناصر مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  حيث  $\mathbb{N}^* = \{١، ٢، ٣، ٠٠٠\}$  لا يمكن عدها بالتأكيد، هذا بالنسبة لعدد عناصر المجموعات، فإننا نسمي المجموعات الخالية والمجموعات التي يمكن تعداد عناصرها ولو نظرياً بالمجموعات المنتهية، فالمجموعة المنتهية هي المجموعة التي عدد عناصرها محدود، وتُسمى هذا العدد بالعدد الرئيس أو العدد الكاردينالي Cardinal Number ويرمز له بالرمز  $n$ .

أي أن  $n(S) = ٤$

$n(\{ \}) = ٠$  صفر

مع ملاحظة أن  $\{ \}$  لا تحوي عناصر إطلاقاً، ولكن عدد عناصرها = صفر أي أن  $n(\{ \}) = n(\phi) = ٠$  صفر.

وفي غير هذه الحالات فإننا نكون أمام مجموعة لا يمكن عد عناصرها أي أن عدد عناصرها لا ينتهي فتسمى مجموعة غير منتهية. ومن أمثلتها:

مجموعة نقاط قطعة مستقيمة.

ومجموعة الأعداد الصحيحة  $\mathbb{Z}$ .

والمجموعات العددية جميعها بلا استثناء.





مثال:

صنّف المجموعات التالية الى منتهية وغير منتهية:

- مجموعة سكان الكرة الأرضية ← منتهية.
- مجموعة الأعداد الطبيعية السالبة، ص ← غير منتهية.
- مجموعة أسماء الخلفاء الراشدين ← منتهية.
- مجموعة بحار العالم ← منتهية.
- مجموعة الأشخاص الذين لا يموتون ← منتهية/حيث أنها المجموعة الخالية.
- مجموعة أنهار العراق ← منتهية.
- مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية ← غير منتهية.
- مجموعة أحرف كلمة "الوطن" ← منتهية.
- مجموعة أرقام العدد ٧٨٩٨٧٩ ← منتهية.
- مجموعة العناصر الكيميائية المكونة للمح الطعام ← منتهية / كونها:
- ← صوديوم Na.
- ← وكلور Cl.
- مجموعة حبيبات رمل البحر ← غير منتهية.

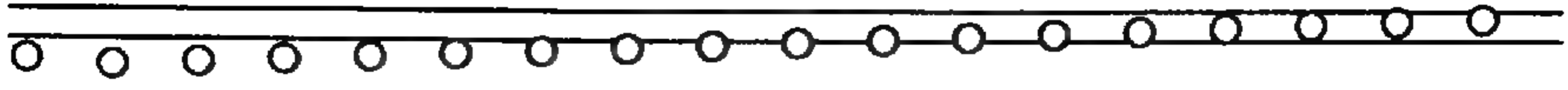
(١ - ٧) الاحتواء والمساواة Inclusion and Equality:

إذا كانت المجموعة س مجموعة أطفال السيد حمدان، حيث:

س = {سلمى، سلوى، سامي، سعاد، سمير}.

وإذا رمزنا لمجموعة البنين منهم بالرمز ص حيث ص = {سامي، سمير} فإن

كل عضو في المجموعة ص ينتمي الى المجموعة س وليس العكس.



عندها يقال أن المجموعة ص مجموعة جزئية Subset من المجموعة س أو  
المجموعة ص محتواة في المجموعة س وتكتب الرموز هكذا:

ص  $\subset$  س وتقرأ ص محتواة في س.

وهكذا تكون ص  $\subset$  س إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة ص ينتمي الى  
المجموعة س، وإلا فالمجموعة ص غير محتواة في المجموعة، ويتحقق ذلك كما في  
المثال:

إذا كانت ص = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } .

فإن ص  $\not\subset$  س { الرمز  $\not\subset$  يقرأ غير محتواة في } .

ونقطة الخلاف الصفر ١ ، حيث  $١ \in$  ص و  $١ \notin$  س.

وإذا كانت المجموعة س مجموعة أحرف كلمة عمان، أي أن:

س = { ع ، م ، أ ، ن } .

وكانت المجموعة ص مجموعة أحرف كلمة معان، أي أن:

ص = { م ، ع ، أ ، ن } .

فإن ص  $\subset$  س كون كل عنصر من عناصر المجموعة س ينتمي الى المجموعة ص.  
وكذلك فإن ص  $\subset$  س كون كل عنصر من عناصر المجموعة ص ينتمي الى  
المجموعة س. أي أن:

( س  $\subset$  ص ) و ( ص  $\subset$  س ) عندها يقال أن:

س = ص هذا شرط المساواة بين مجموعتين.

أي أن المجموعتين م ، ن تكونان متساويتين إذا تكونتا من العناصر نفسها  
دون النظر الى الترتيب.

فإذا كانت المجموعة م هي مجموعة أرقام العدد ١٢٢٣ أي أن م = { ٢ ، ١ ، ٣ } .

والمجموعة د ، هـ حيث د = { ٣ ، ٥ } ، هـ = { ٥ ، ٣ } .





فينطبق عليها شرط الاحتواء، أي أن  $d \supset h$

وكذلك شرط المساواة، أي أن  $d = h$

عندها يمكن أن نكتب بالرموز هكذا:  $d \supseteq h$

ومعناه أن  $(d \supset h)$  أو  $(d = h)$  أيهما صواب أو كليهما معاً.

لذلك فإن  $\{3, 2, 1\} \supseteq \{2, 1\}$  لأن  $\{3, 2, 1\} \supset \{2, 1\}$

وكذلك فإن  $\{1, 2\} \supseteq \{2, 1\}$  لأن  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

وبشكل عام إذا كانت  $m \supset n$  فيكتب  $m \supseteq n$

وبما أن  $\{1\} \supset \{1, 2\}$ ، وكذلك  $\{2\} \supset \{2, 1\}$  ثم إن  $\{2, 1\} \supset \{2, 1\}$  محتواه في نفسها. وعلماً بأن  $\{2, 1\} \supset \emptyset$  كون المجموعة الخالية  $\emptyset$  لا تحتوي عناصر إطلاقاً.

فإن المجموعات  $\emptyset$ ،  $\{1\}$ ،  $\{2\}$ ،  $\{2, 1\}$  جميعها مجموعات جزئية للمجموعة  $\{2, 1\}$ .

وهنا يجب ملاحظة أن:

عدد المجموعات الجزئية للمجموعة الخالية  $\{\}$  واحد، وهي نفسها  $\emptyset$ .

وعدد المجموعات الجزئية للمجموعة  $\{1\}$  اثنان وهما  $\emptyset$ ،  $\{1\}$ .

وعدد المجموعات الجزئية للمجموعة  $\{2, 1\}$  أربعة وهي  $\emptyset$ ،  $\{1\}$ ،  $\{2\}$ ،  $\{2, 1\}$ .

وبناء على هذا المنوال يمكن استنتاج أن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة التي عدد عناصرها  $n$  هو  $2^n$  مجموعة جزئية.

فإذا كانت المجموعة  $S = \{3, 2, 1\}$  فإن عدد عناصرها الجزئية هو  $2^3 = 8$

وهي  $\emptyset$ ،  $\{1\}$ ،  $\{2\}$ ،  $\{3\}$ ،  $\{2, 1\}$ ،  $\{3, 2\}$ ،  $\{3, 1\}$ ،  $\{3, 2, 1\}$ .





تسمى جميع هذه المجموعات الجزئية ماعدا الخالية منها بالمجموعات الجزئية الفعلية Proper Subsets وأما المجموعة  $\phi$  فإنها مجموعة جزئية لكنها غير فعلية.

ملحوظة:

يجب التمييز بين استعمال الرمز  $\exists$ ، كما يلي:

حيث الأول  $\exists$  يربط عنصر بمجموعة هكذا:

$$1 \in \{1, 2, 3\}.$$

والثاني  $\supseteq$  يربط مجموعة بأخرى هكذا:

$$\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

فإذا كانت المجموعة  $S = \{3, 5, 4, 1, 2, 3\}$ ،  $V = \{3, 4, 2, 1, 3\}$ ، جـ

فإن  $3 \in S$ ،  $\{5, 6\} \not\subseteq S$ ،  $3 \in V$ ،  $2 \in S$

$V \not\subseteq S$ ،  $\{1, 2\} \supseteq S$ ،  $5 \not\supseteq V$  وهكذا.

مثال:

■ إذا كانت  $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$  ما قيمة  $A$ ؟

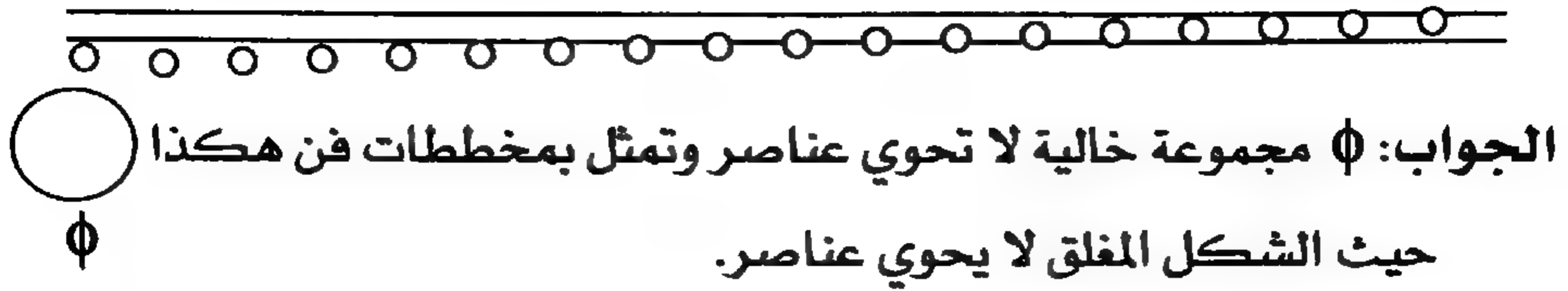
الجواب:  $A = 4$  كون المجموعتين متساويتين.

■ ما عدد عناصر مجموعة القوة للمجموعة  $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ؟

عدد عناصر مجموعة القوة  $= 2^n$  حيث  $n$  عدد عناصر المجموعة  $S$

$$= 2^4 = 16 \text{ مجموعة جزئية.}$$

■ ما الفرق بين  $\phi$ ،  $\{\phi\}$  وكيف نمثل كلاهما بمخططات فن؟



وأما  $\{\phi\}$  مجموعة أحادية أي تحوي عنصر واحد هو  $\phi$  (كعنصر) أي أن الرمز  $\phi$  هنا كعنصر. وتمثل بمخططات فن هكذا  $\{\phi\}$  حيث الشكل المغلق يحتوي عنصر واحد هو  $\phi$ .

#### (١ - ٨) المجموعة الكلية أو الشاملة Universal Set:

إذا كانت جميع المجموعات الواردة في دراسة واحدة أجزاء من مجموعة واحدة -جزئية لمجموعة واحدة- سميت هذه المجموعة بالكلية أو الشاملة، ويرمز لها بالرمز  $K$  وهذه المجموعة كأنها إطار يضم داخله المجموعات الجزئية منها والتي هي قيد الدراسة الواحدة.

فإذا كانت  $S = \{1, 2, 3\}$ ،  $V = \{2, 3, 4, 5\}$ ،  $E = \{5, 6, 7\}$

فإن المجموعة الكلية أو الشاملة لهذه المجموعات:

يمكن أن تكون  $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  مثلاً.

لأن  $S \subseteq K$ ،  $V \subseteq K$ ،  $E \subseteq K$

كون كل عنصر من عناصر المجموعات  $S$ ،  $V$ ،  $E$  بلا استثناء ينتمي الى المجموعة  $K$  الكلية.

وعليه فالمجموعة الكلية لمجموعات الفصول الدراسية كافة هي المدرسة بكاملها، كون كل طالب من طلاب الفصول الدراسية ينتمي الى المدرسة، وهكذا..

وفي هذا المجال يمكن أن يقال بأن المجموعة العددية الكلية لكافة المجموعات العددية الأخرى هي مجموعة الأعداد المركبة  $E$ ، ولكن بشكل تراكمي، كما في الشكل.

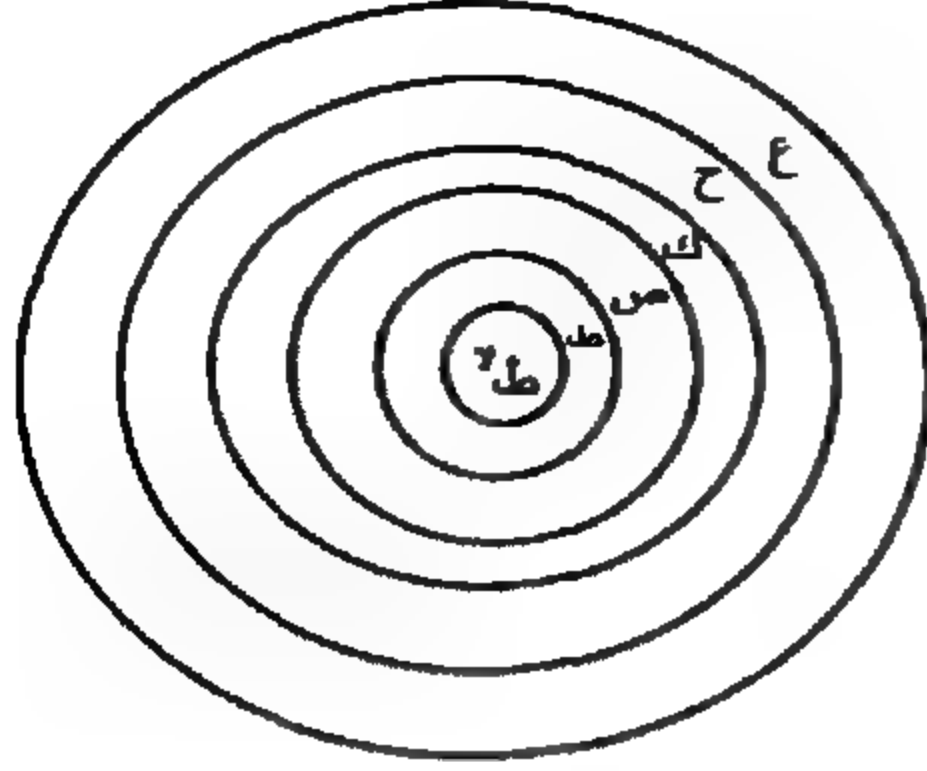
حيث  $P^* \supset E$ ،  $T \supset E$ ،  $V \supset E$ ،  $K \supset E$ ،  $H \supset E$



لأن  $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}^* \supset \mathcal{V} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{E}$

فكل عنصر في  $\mathcal{P}^*$  هو في  $\mathcal{E}$

وكل عنصر في  $\mathcal{P}$  هو في  $\mathcal{E}$  وهكذا..



### (١ - ٩) جبر المجموعات Algebraic Sets :

والمقصود بجبر المجموعات هو تكوين مجموعات جديدة من أخرى قديمة، وذلك بعمليات عديدة نحصرها بالخمس التالية:

#### (i) عملية التقاطع Intersection:

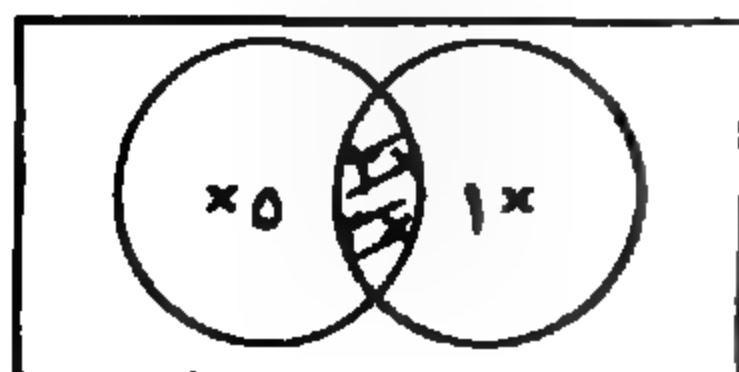
التقاطع عملية رياضية ترتبط بالمجموعات مفادها تكوين مجموعة واحدة من مجموعتين أو أكثر، بحيث تكون عناصر هذه المجموعة تنتمي الى كل من المجموعات أو المجموعتين بالتحديد أي أن العنصر المشتركة بين المجموعتين فقط، والتفسير كما في الأوضاع التالية:

$$\text{إذا كانت } \mathcal{S} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{V} = \{2, 3, 4\}$$

فإن  $\mathcal{S}$  المجموعة الناتجة عن تقاطع المجموعتين  $\mathcal{S}$  ،  $\mathcal{V}$  هي المجموعة التي عناصرها العناصر المشتركة بين المجموعتين بلا تكرار.

وبالرموز:

$\mathcal{K}$  = المجموعة الكلية



وتقرأ  $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$

$\mathcal{S} \cap \mathcal{V} = \{2, 3\}$  حيث  $\cap$  يقرأ تقاطع.

وبأشكال فن تمثل  $\mathcal{S} \cap \mathcal{V}$  بالمنطقة المظلة وبما أنه يوجد عناصر مشتركة بين المجموعتين  $\mathcal{S}$  ،  $\mathcal{V}$  فإنهما تسميان مجموعتان متقاطعتان.

## المجموعات والأعداد

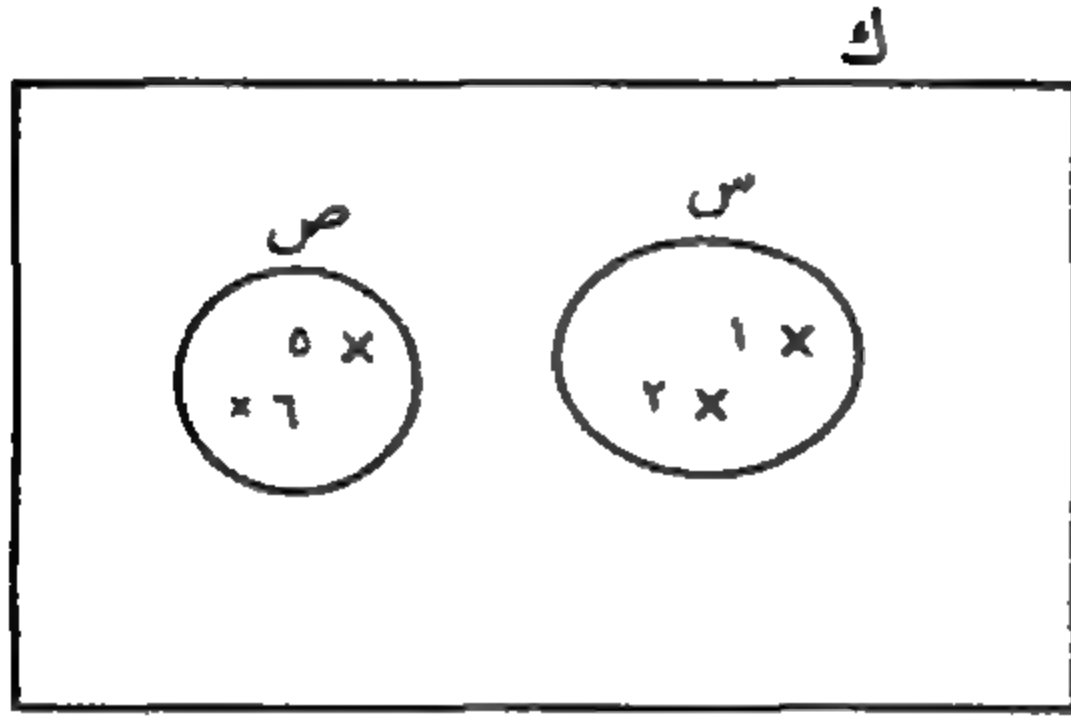


وإذا كانت المجموعتان منفصلتين Disjoint فإنه لا يوجد فيها عناصر مشتركة كما يلي:

$$س = \{1, 2\}, ص = \{5, 6\}.$$

فإن  $س \cap ص = \phi = \{ \}$  حيث لا عناصر مشتركة.

وباشكال فن لا تظليل.



$س \cap ص = \phi$   
ولا تظليل إطلاقاً

وتسمى المجموعتان منفصلتين وشرط

الانفصال في المجموعات هو:

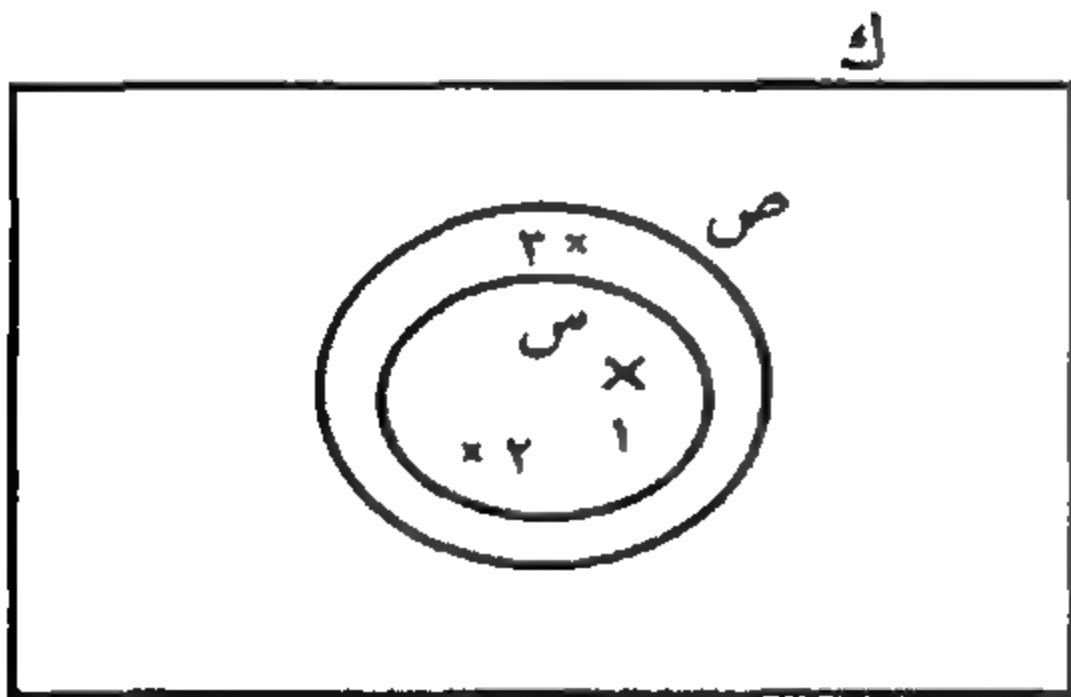
$$س \cap ص = \phi$$

وإذا كانت المجموعتان متداخلتين، أي أن الأولى محتواه في الثانية أو العكس أي أن  $س \supset ص$  مثل:

$$س = \{1, 2\}, ص = \{1, 2, 3\}$$

$$فإن س \cap ص = \{1, 2\}$$

وباشكال فن:



$س \cap ص = س$   
حيث  $س \supset ص$

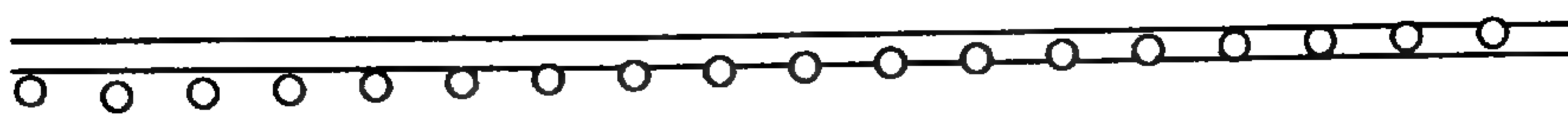
وبشكل عام يمكن وصف عملية تقاطع مجموعتين أو أكثر هكذا:

$$س \cap ص = \{ع : ع \in س \text{ و } ع \in ص\}$$

حيث أ عنصر مشترك في كليهما.







فغناصر مجموع التقاطع للمجموعتين  $S$  ،  $V$  ينتمي الى المجموعتين معاً.

والآن سنورد خصائص تقاطع المجموعات على نظريات وقوانين بلا اثبات ولا

براهين، مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان هكذا:

$$\{1, 2, 3\} = S \text{ للمجموعات}$$

$$\{2, 3, 4\} = V$$

$$\{2, 3, 5\} = E$$

فإن:

$$S \cap V = V \cap S$$

$$\{2, 3\} = V \cap S \text{ كون}$$

$$\{2, 3\} = S \cap V \text{ وكون}$$

فتقاطع المجموعات تبديلي Commutative.

$$S \cap (V \cap E) = (S \cap V) \cap E$$

$$\{2, 3\} = E \cap (S \cap V) \text{ كون}$$

$$\{2, 3\} = (S \cap V) \cap E \text{ وكون}$$

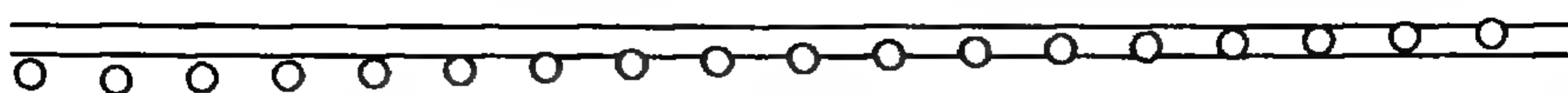
فتقاطع المجموعات تجميعي Associative.

$$S \cap S = S$$

$$V \cap V = V \text{ وكذلك}$$

$$E \cap E = E \text{ وكذلك}$$

## المجموعات والأعداد



وهذا القانون يدعوه الرياضيون قانون اللانمو Idem potency.

أي أن المجموعة تقاطع نفسها بلا زيادة في عدد عناصرها.

$$S \cap S = S$$

وكذلك  $(S \cap S) \cap S = S$  وهكذا

$$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\}$$

$$\{2, 3, 4\} \cap \{2, 3\} = \{2, 3\}$$

$$S \cap \emptyset = \emptyset$$

حيث  $\emptyset$  المجموعة الخالية.

لذلك فالمجموعات  $S \cap \emptyset$  ،  $\emptyset \cap S$  لا تحوي عناصر إطلاقاً.

$$S \cap K = K \cap S = S$$

حيث  $K$  المجموعة الكلية.

(ii) عملية الاتحاد Union:

والاتحاد عملية رياضية ترتبط بالمجموعات مفادها تكوين مجموعة واحدة

من مجموعتين أو أكثر، بحيث تكون عناصر هذه المجموعة تنتمي الى احدى

المجموعات على الأقل أو جميعها.

والتفسير:

$$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

فالمجموعة الناتجة عن اتحاد المجموعتين  $S$  ،  $V$  هي المجموعة التي

عناصره جميع عناصر المجموعتين بلا تكرار لأي عنصر منهما مهما كان.



## المجموعات والأعداد



وبالرموز:

$$S \cup V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

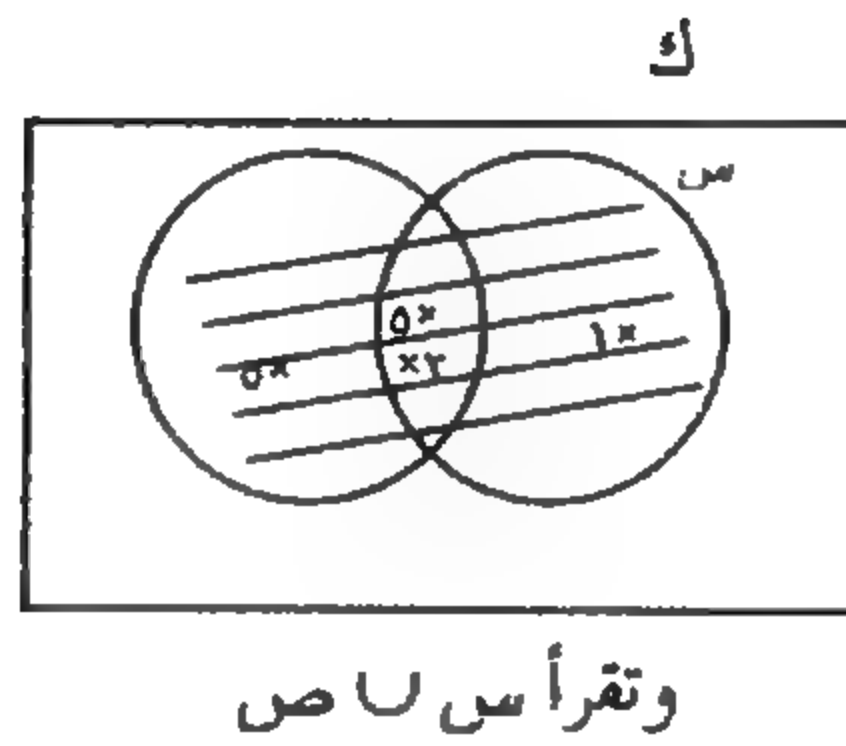
حيث:

الرمز  $\cup$  يقرأ اتحاد.

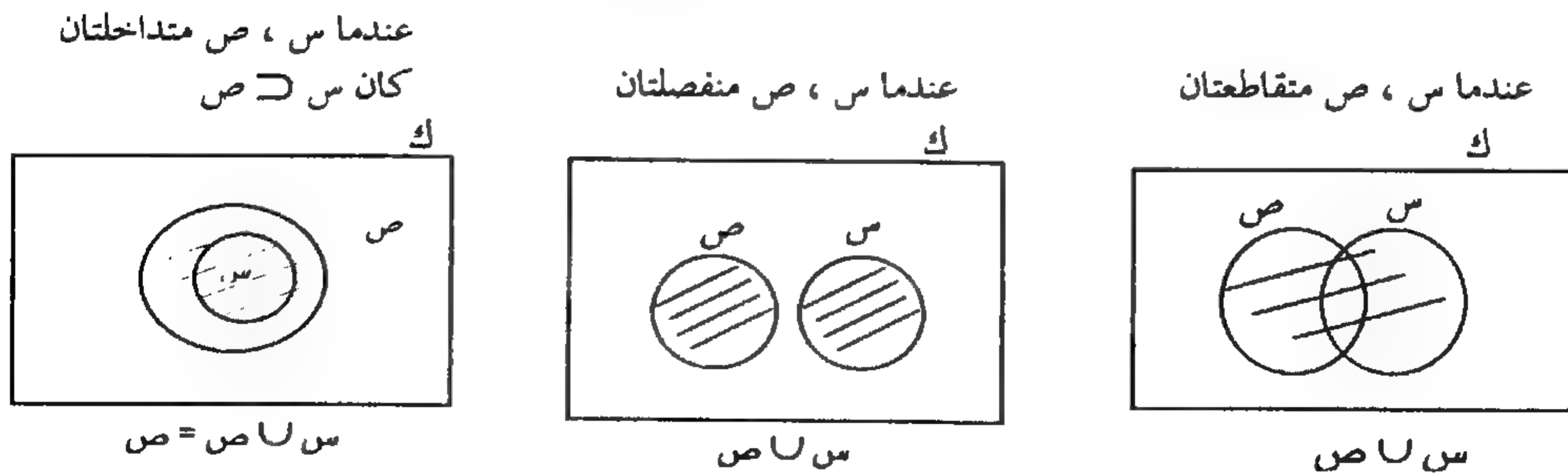
وكان عناصر المجموعة  $S \cup V$  هي العناصر المشتركة بين المجموعتين

$$- \{2, 3\} - \text{والعناصر غير المشتركة} - \{0, 1\}$$

وباشكال فن:



ومخططات فن التالية توضح عملية اتحاد مجموعتين  $S$ ،  $V$  في حالات متباينة، حيث تمثل المناطق المظللة  $S \cup V$  في كل منها.



لذا يمكن وصف عملية الاتحاد بشكل عام لمجموعتين أو أكثر هكذا:

$$S \cup V = \{x : x \in S \text{ أو } x \in V\}$$



## المجموعات والأعداد



حيث أ أي عنصر من عناصر المجموعة س  $U$  ص وهو وصف لما يُقال بأن عناصر مجموعة الاتحاد تنتمي الى احدى المجموعتين على الأقل أو الى كليهما معاً.

والآن سنورد خصائص عملية الاتحاد على المجموعات بشكل نظريات وقوانين، وبلا اثبات وبراهين، مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

$$\text{للمجموعات: } S = \{1, 2, 3\}$$

$$V = \{2, 3, 4\}$$

$$E = \{2, 3, 5\}$$

فإن:

$$S \cup V = V \cup S$$

$$\text{كون: } S \cup V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$V \cup S = \{1, 2, 3, 4\}$$

فاتحاد المجموعات تبديلي Commutative.

$$S \cup (V \cup E) = (S \cup V) \cup E$$

$$\text{كون: } (S \cup V) \cup E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$S \cup (V \cup E) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

فاتحاد المجموعات تجميعي Associative.

$$S \cup S = S \text{ وكذلك } V \cup V = V, E \cup E = E$$

وهذا القانون يدعوه الرياضيون قانون اللانمو Idem potency.

أي أن المجموعة اتحاد نفسها تعطي المجموعة نفسها بلا زيادة لعدد عناصرها.

$$S \supset (S \cup V) \text{ وكذلك } V \supset (S \cup V) \text{ وهكذا..}$$







كون  $\{4, 3, 2, 1\} \supset \{3, 2, 1\}$

وكذلك  $\{4, 3, 2, 1\} \supset \{4, 3, 2\}$

$$S \cup \phi = \phi \cup S = S$$

حيث  $\phi$  المجموعة الخالية وكأنها محايدة هنا كونها لا تؤثر بغيرها من المجموعات من زيادة عدد عناصرها أو انفصالها على السواء.

$$S \cup K = K \cup S = \text{حيث } K \text{ المجموعة الكلية.}$$

الآن دونك هذا السؤال:

ما العلاقة بين عملية اتحاد وعملية تقاطع المجموعات؟

الجواب:

كما في البندين التاليين:

البند الأول: قانون التوزيع Distributive Law:

وعلى صورتين:

الأولى: توزيع عملية الاتحاد على عملية التقاطع وبالرموز:

$$S \cup (C \cap V) = (S \cup C) \cap (S \cup V)$$

الثانية: توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد وبالرموز:

$$S \cap (C \cup V) = (S \cap C) \cup (S \cap V)$$

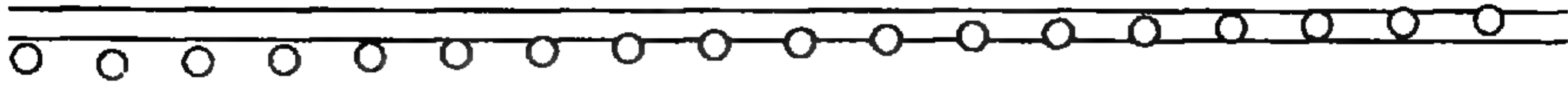
ولتحقيق هذا القانون نفرض:

$$S = \{5, 6, 7\}$$

$$V = \{5, 7, 8\}$$

$$C = \{5, 8, 9\}$$





توزيع الاتحاد على التقاطع:

$$(\{9, 8, 5\} \cap \{8, 7, 5\}) \cup \{7, 6, 5\}$$

$$\{8, 7, 6, 5\} = \{8, 5\} \cup \{7, 6, 5\} =$$

وكذلك:

$$(\{9, 8, 5\} \cup \{7, 6, 5\}) \cap (\{8, 7, 5\} \cup \{7, 6, 5\})$$

$$\{9, 8, 7, 6, 5\} \cap \{8, 7, 6, 5\} =$$

$$\{8, 7, 6, 5\} = \text{الطرف الأيسر.}$$

وأما توزيع التقاطع على الاتحاد مناقشته أنت بنفس الأسلوب:

البند الثاني: هو هذه العلاقة بين التقاطع والاتحاد في المجموعات:

$$(S \cap V) \supset (S \cup V)$$

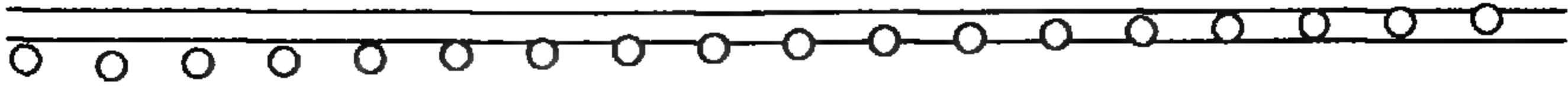
$$\text{حيث: } S \cap V = \{7, 5\}$$

$$S \cup V = \{8, 7, 6, 5\}$$

$$\{7, 8, 6, 5\} \supset \{7, 5\} \text{ وكون}$$

فإن:

$$S \cap V \supset (S \cup V) \text{ دائماً.}$$



## أمثلة على الاتحاد والتقاطع معاً

مثال:

إذا كانت  $S =$  مجموع أرقام العدد ٢٤٩٧٨٤

$V =$  مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين ٣ ، ١٠ ودونهما.

فإن:

$$S \cup V = \{2, 9, 7, 8, 4\} \cup \{9, 8, 7, 6, 5, 4\}$$

$$= \{2, 9, 7, 8, 4, 6, 5\}$$
 العناصر المشتركة وغير المشتركة.

وان:

$$S \cap V = \{2, 9, 8, 7, 4\} \cap \{9, 8, 7, 6, 5, 4\}$$

$$= \{9, 8, 7, 4\}$$
 العناصر المشتركة فقط.

مثال:

إذا كانت  $S$  مجموعة مضاعفات العدد ٣ والتي تقل عن ٢٠

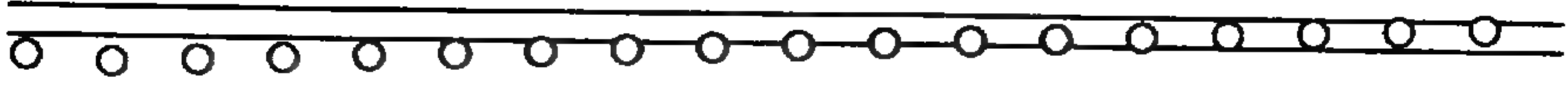
وكانت  $V$  مجموعة مضاعفات العدد ٧ والتي تقل عن ٢٠

$$S = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$V = \{7, 14\}$$

$$\text{وان: } S \cap V = \emptyset \text{ حيث } S, V \text{ مجموعتان منفصلتان}$$

$$\text{وان: } S \cup V = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 7, 14\}$$



مثال:

باستعمال العملية  $\cup$  ،  $\cap$  عبر عن المنطقة المظللة في الشكل:

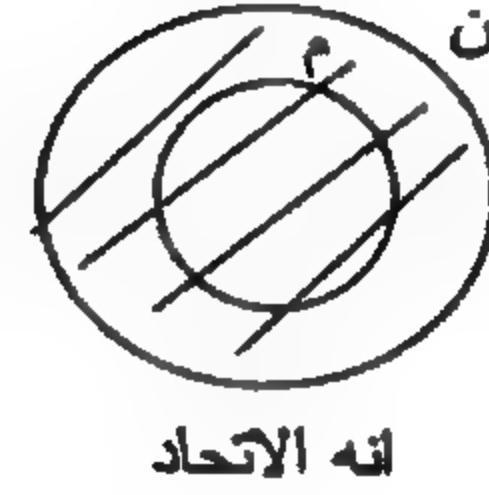
التعبير  $S \cap V = S$  كون  $S \supset V$



الأول:

لأنه التقاطع

التعبير  $M \cup N = N$  كون  $M \supset N$



الثاني:

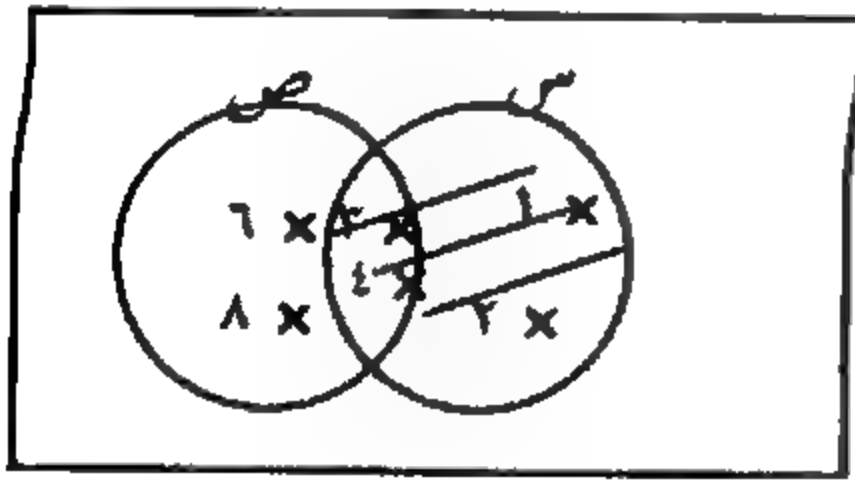
لأنه الاتحاد

(iii) عملية الفرق Difference:

عملية الفرق بين مجموعتين (س ، ص مثلا) تنتج مجموعة ثالثة عناصرها تنتمي الى المجموعة الأولى س ولا تنتمي الى المجموعة الثانية ص  
يرمز لها بالرمز  $S - V$  كما في المثال:

إذا كانت  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  ،  $V = \{2, 4, 6, 8\}$

فإن  $S - V = \{1, 3\}$  <sup>ك</sup>

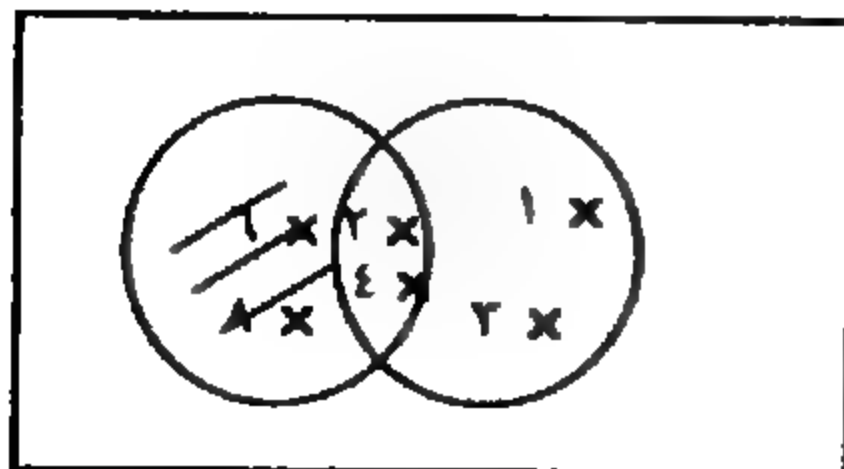


$S - V$

وتمثيلها بمخططان فن يكون هكذا:

ويمكن أن نجد  $V - S$  كما يلي:

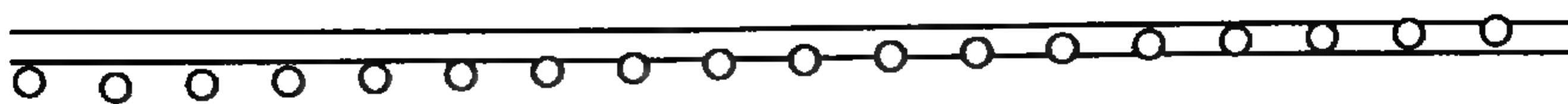
$V - S = \{6, 8\} = \{1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4\}$  <sup>ك</sup>



$V - S$

وتمثيلها باشكال فن يكون هكذا:





وكما هو واضح من الشكلين السابقين فإن:

س - ص  $\neq$  ص - س فعملية الفرق ليست تبديلية

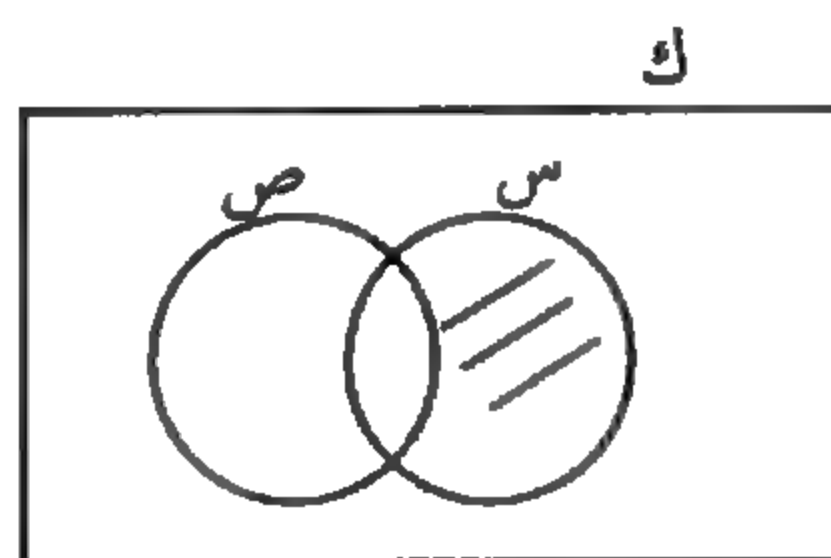
كون: س - ص = { ١ ، ٢ } ، ص - س = { ٦ ، ٨ }

وان: { ١ ، ٢ }  $\neq$  { ٦ ، ٨ }

وبشكل عام تمثل مخططات فن التالية عملية الفرق بين المجموعتين

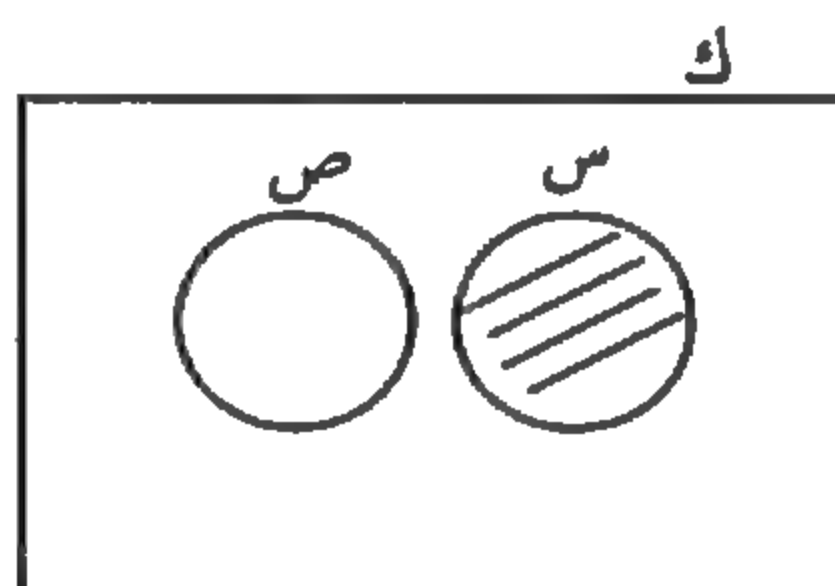
س، ص في حالات عديدة حيث تمثل المناطق المظللة مجموعات الفرق في كل منها:

× اذا كان بين المجموعتين س ، ص عناصر مشتركة - مجموعات متقاطعة - .



س - ص

× اذا لا يوجد بين المجموعتين س ، ص عناصر مشتركة - مجموعات منفصلة.

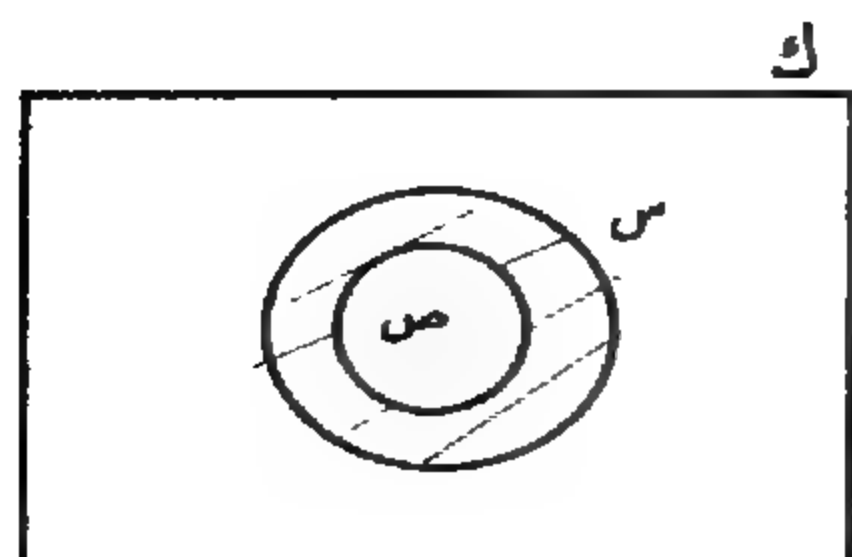


س - ص

× اذا كانت احدى المجموعتين محتواه في الأخرى - متداخلتان - كما في

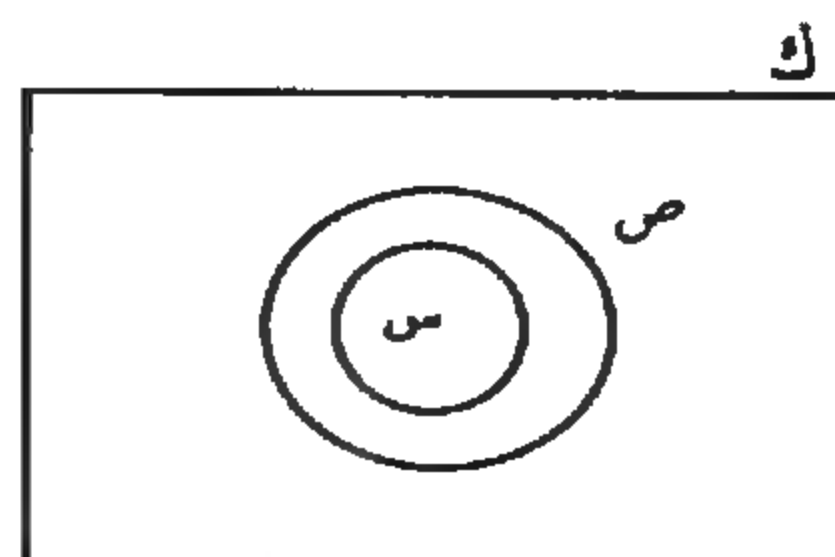
الشكلين:

ص  $\supset$  س



س - ص

س  $\supset$  ص



س - ص لا تظليل كونه  
مستحيل

حيث س - ص =  $\emptyset$



والآن سنورد خصائص عملية الفرق بين المجموعات على شكل قوانين ونظريات مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

للمجموعات  $S = \{1, 2, 3\}$ ،  $V = \{3, 4, 5\}$ ،  $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ولأن:

$$S - V = \{1, 2, 3\} - \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$$

$$V - S = \{3, 4, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$$

فإن:

$S - V \neq V - S$  فالفرق بين المجموعات ليس تبديلي.

$$S \times S - S = \{1, 2, 3\} - \{1, 2, 3\} = \emptyset$$

وكذلك  $V - V = \emptyset$  أيضاً

$$S \times \emptyset = \emptyset \text{ وكذلك } V - \emptyset = S \text{ وهكذا}$$

$$\emptyset \times S = \emptyset \text{ وكذلك } \emptyset - \emptyset = \emptyset \text{ وهكذا}$$

$$S \times K = \emptyset \text{ حيث } K \text{ المجموعة الكلية أو الشاملة}$$

$$S \times (V - S) \supseteq S \text{ كون } S - V = \{1, 2\} \text{، } S = \{1, 2, 3\}$$

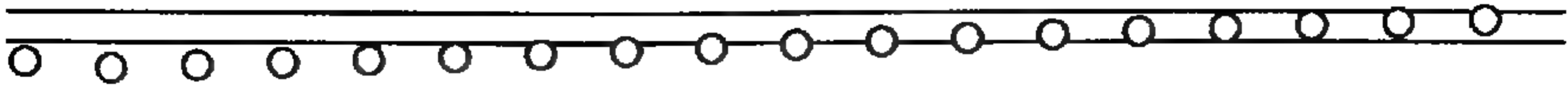
$$\text{وكذلك } (V - S) \supseteq V - S \text{ كون } V - S = \{4, 5\} \text{، } V = \{3, 4, 5\}$$

(iv) عملية الفرق التناظري Symmetric Difference:

عملية الفرق التناظري بين مجموعتين  $S$ ،  $V$  تنتج مجموعة ثالثة عناصرها تنتمي الى واحدة فواحدة فقط من المجموعتين وليس لكليهما على الاطلاق.

ويرمز لها بالرمز  $\Delta$   $S \Delta V$  ويقراً  $S$  دلتا  $V$  ويمكن وصف المجموعة الناتجة هكذا:





س  $\Delta$  ص = {ع: (ع  $\exists$  س و ع  $\exists$  ص) أو (ع  $\exists$  س و ع  $\exists$  ص)}

وبالرموز:

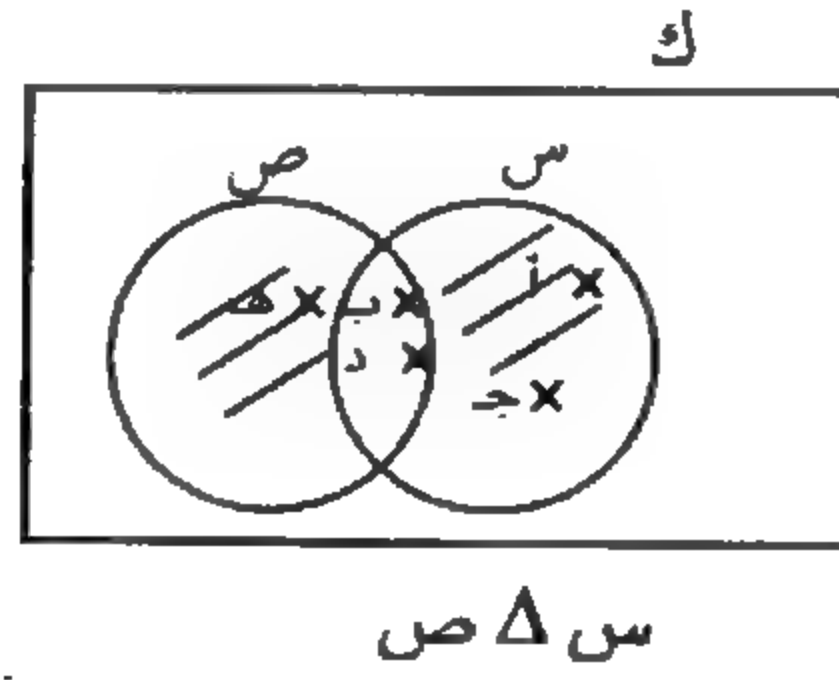
س  $\Delta$  ص = (س - ص)  $\cup$  (ص - س) حيث أو تترجم بلغة المجموعات الى عملية الاتحاد  $\cup$ .

مثال:

إذا كانت س = {أ ، ب ، ج ، د} ، ص = {ب ، د ، هـ}

فإن س  $\Delta$  ص = (س - ص)  $\cup$  (ص - س) = {أ ، ج}  $\cup$  {هـ} = {أ ، ج ، هـ}

وتمثيلها بمخططات فن يكون هكذا حيث المنطقة المظلمة تمثل المجموعة س  $\Delta$  ص



والآن سنورد خصائص عملية الفرق التناظري بين المجموعات على شكل توافق ونظريات مصحوبة بشيء من التوضيح والبيان:

للمجموعات س = {أ ، ب ، ج} ، ص = {ب ، ج ، د} ، ع = {ب ، ج ، هـ}

فإن:

$$س \times \Delta ص = (س - ص) \cup (ص - س) = \{أ ، د\}$$

$$\text{وكذلك } ص \Delta س = (ص - س) \cup (س - ص) = \{أ ، د\}$$

فإن: س  $\Delta$  ص = ص  $\Delta$  س فعملية الفرق التناظري تبديلية

$س \times \Delta \phi = \phi \Delta س = س$  حيث  $\phi$  لا عناصر فيها وكأنها مجموعة محايدة.

$$س \times \Delta س = (س - س) \cup (س - س) = \phi$$



$$= \times (س \Delta ص) \Delta ع$$

$$\{أ، د\} \Delta \{ب، ج، هـ\} =$$

$$\{أ، د، ب، ج، هـ\} =$$

$$\text{وكذلك } س \Delta (ص \Delta ع) = س \Delta ج \cup (ع - ص) \cup (ص - ع)$$

$$\{أ، ب، ج\} \Delta (\{د\} \Delta \{هـ\}) =$$

$$\{أ، ب، ج\} \Delta \{د، هـ\} =$$

$$\{أ، ب، ج، د، هـ\} =$$

ومنها  $(س \Delta ص) \Delta ع = س \Delta (ص \Delta ع)$  فعملية الفرق التناظري تجميعية.

(v) عملية الاتمام Complement:

الاطتمام عملية رياضية ترتبط بمجموعة واحدة مثل س لتنتج مجموعة أخرى تسمى متممة س ويرمز لها بالرمز  $س'$  عناصرها تنتمي الى المجموعة الكلية ك ولا تنتمي الى المجموعة الأصلية س.

أي أن عناصر المجموعة  $س'$  لا تنتمي الى المجموعة س اطلاقاً.

وهذا التعريف يحتم أن تكون العلاقة بين المجموعتين س ،  $س'$  كما يلي:

$$س' = ك - س \text{ حيث ك المجموعة الكلية.}$$

عندها تكون عناصر  $س'$  ليست عناصر س ولا تشترك معها بأي عنصر كان.

مثال:

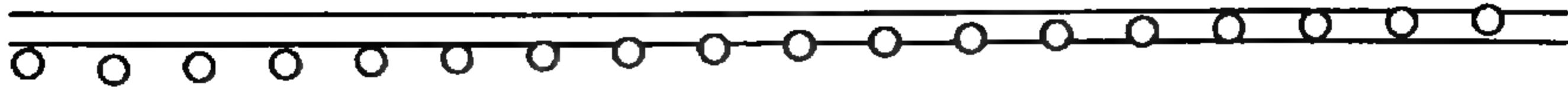
$$\text{إذا كانت ك} = \{1، 2، 3، 4، 5\}، س = \{1، 3، 5\}$$

$$\text{فإن } س' = ك - س = \{1، 2، 3، 4، 5\} - \{1، 3، 5\} = \{2، 4\}$$

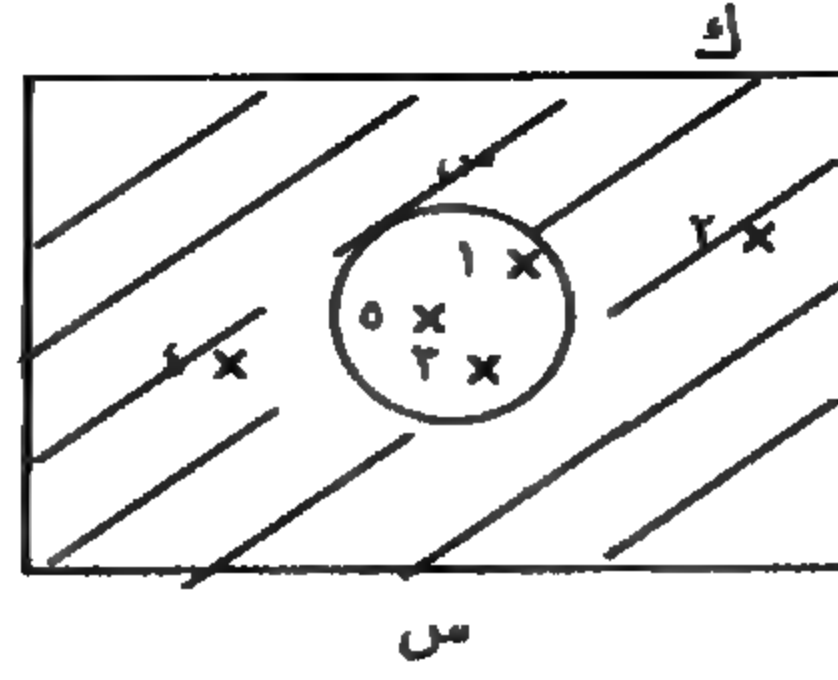




## المجموعات والأعداد



وتمثيلها بمخططات فن كما يلي:



وهكذا فإن  $S = \{a : a \in S \text{ دائماً وان } a \in K\}$

فإذا كانت  $K$  مجموعة سكان المعمورة وكانت  $S$  مجموعة الذكور في المعمورة فإن  $S$  هي مجموعة الاناث فيها.

فإذا كانت  $K = \text{ط}^*$  أي المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية

وكانت  $Z = \{2, 4, 6, \dots\}$  مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية Even Numbers فيها

فإن  $Z^* = \{1, 3, 5, \dots\}$  مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية Odd Numbers فيها

وتسمى  $F$  حيث  $Z = \text{مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية}$ .

حيث  $F = \text{مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية}$ .

والعلاقة بينها:  $F = Z^*$  وكذلك  $Z = F^*$

لأن  $Z \cup F = F^* \cup Z = \text{ط}^*$  والميزة هنا خاصة وليست عامة { وللأعداد الفردية والزوجية.

والآن سنورد خصائص عملية الاهتمام على شكل قوانين ونظريات مصحوبة

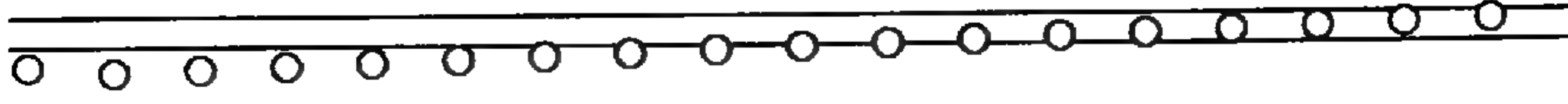
نسبي من التوضيح والبيان:

للمجموعة  $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  والمجموعة  $S = \{1, 3, 5\}$

فإن:

$S - K = \{2, 4\}$  وتقرأ متممة  $S$





$$(S) = K - S = (K - S) = K - S + S = S$$

$$\text{وبالرموز } S = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5\}$$

$$(S) = \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{1, 2, 3, 4\} = (S) = \{5\}$$

$$\text{أي أن } (S) = S \text{ وتقرأ متممة متممة } S = S$$

وتسمى خاصية الارتداد للاتمام Involution

$$\phi = (K) \text{ وكذلك } \phi = (K)$$

$$\phi = S \cap S = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

لأن من المستحيل وجود عناصر مشتركة بين المجموعة ومتمتها.

$$S \cup S = S = S \cup S = K$$

$$\text{كون } K = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{5\}$$

$$\times \text{ إذا كانت المجموعة } E \supseteq L \text{ فإن } L \supseteq E$$

$$\text{فعندما } E = \{7, 8\}, L = \{7, 8, 9\}, K = \{6, 7, 8, 9\}$$

$$\text{فإن } \{7, 8\} \supseteq \{7, 8, 9\} \text{ من مفهوم الاحتواء}$$

$$\text{وان } L = \{7, 8, 9\} - \{6, 7, 8, 9\} = \{9\}$$

$$\text{وان } E = \{7, 8\} - \{6, 7, 8, 9\} = \{7, 8\}$$

$$\text{واضح أن } \{7, 8\} \supseteq \{9\}$$

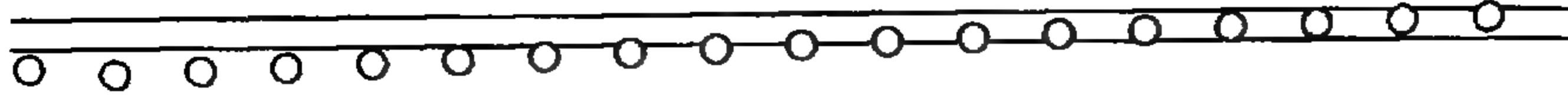
$$\text{أي أن } L \supseteq E$$

$$\times \text{ إذا كانت } K = \{1, 2, 3, 4, 5\}, S = \{1, 2\}, V = \{2, 3\}$$

$$\text{فإن } S = \{1, 2\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{2\}$$

$$\text{وان } V = \{2, 3\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3\}$$





ولما كانت  $S \cup V = \{1, 2, 3\}$

فإن  $\overline{S \cup V} = \overline{V \cup S}$  وتقرأ المتمة الكلية لاتحاد المجموعتين  $S, V$

$$\overline{S \cup V} = \{K - (S \cup V)\} = \{5, 4\}$$

$$\overline{S \cap V} = \{5, 4, 3\} \cap \{5, 4, 1\} = \{5, 4\}$$

$$\therefore \overline{S \cap V} = S \cup V \leftarrow (1)$$

قانونا دي مورغان للاتمام  
De Morgan's Laws

وبأسلوب مماثل فإن:

$$\overline{S \cap V} = S \cup V \leftarrow (2)$$

ويمكن كتابة القانونين هكذا:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{انتبه لعكس الاشارتين} \\ \text{عند فك القوسين } \cap, \cup \end{array} \right\} \begin{array}{l} (S \cup V)' = S' \cap V' \\ \text{وكذلك } (S \cap V)' = S' \cup V' \end{array}$$



## أمثلة محلولة على جبر المجموعات

مثال:

للمجموعات ك ، س ، ص يتبين أن:

$$س \cap (س \cup ص) = س \cap ص$$

الطرف الأيمن:  $س \cap (س \cup ص)$  وباستخدام خاصية التوزيع

$$= (س \cap س) \cup (س \cap ص) = س \cap ص$$

$$= (س \cap ص) \cup \phi = س \cap ص = \text{الطرف الأيسر.}$$

مثال:

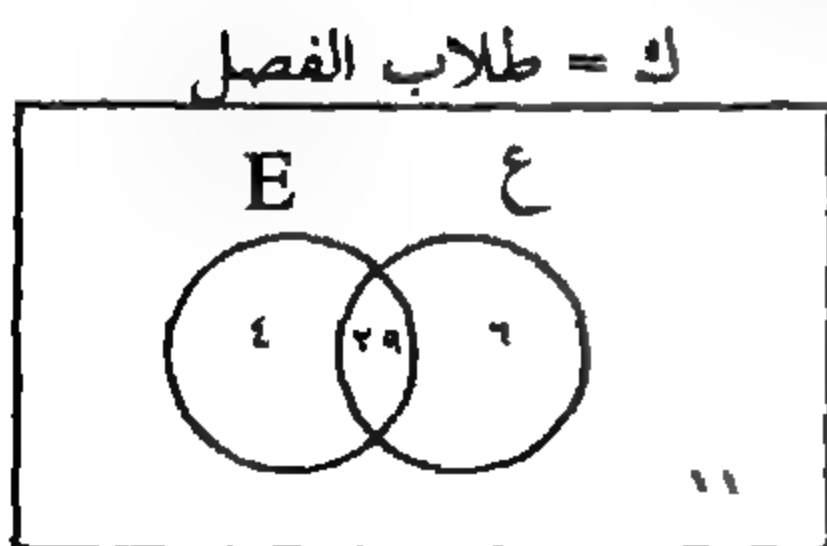
تقدم ٥٠ طالباً في أحد الفصول الدراسية لامتحان عام فنجح منهم في اللغة العربية ٣٥ طالب، وفي اللغة الانجليزية ٣٣ طالب وفي اللغتين (العربية والانجليزية) معاً ٢٩ طالب.

فأوجد: عدد الناجحين في اللغة العربية فقط.

عدد الناجحين في اللغة الانجليزية فقط.

عدد الذين لم يحالفهم الحظ في النجاح في اللغتين.

تمثل المعلومات الواردة في السؤال بمخططات فن كما يلي:



عدد الناجحين في اللغتين ٢٩ طالب

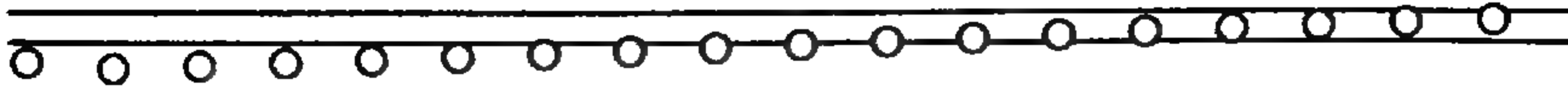
عدد الناجحين في العربية فقط  $٣٥ - ٢٩ = ٦$  طلاب

عدد الناجحين في الانجليزية فقط  $٣٣ - ٢٩ = ٤$  طلاب

عدد الناجحين في العربية أو الانجليزية أو اللغتين معاً  $٢٩ + ٤ + ٦ = ٣٩$  طالب

عدد الذين لم يحالفهم الحظ في النجاح  $٥٠ - ٣٩ = ١١$  طالب





مثال:

إذا كانت  $K = \{أ، ب، ج، د، هـ، و، ن\}$

$S = \{أ، ب، ج، د، هـ\}$

$V = \{أ، ج، هـ، ن\}$

$E = \{ب، هـ، و، ن\}$

فإن  $S - \{و، ن\} = V$  ،  $\{ب، د، و\} = E$  ،  $\{أ، ج، د\} = S - V$

وإن  $S - V = \{أ، ج، د\} = E - \{و، ن\} = D$

وإن  $(S \cap V)' = (\phi)' = K$

وإن  $S \cup (V \cap E) = S \cup (\{ب، و\}) = \{ب\}$

مثال:

إذا كانت  $K = \{أ، ب، ج، د، هـ\}$

جزئ المجموعة ك الى ثلاث مجموعات أ ، ب ، ج يجب تحقق الشروط التالية معاً.

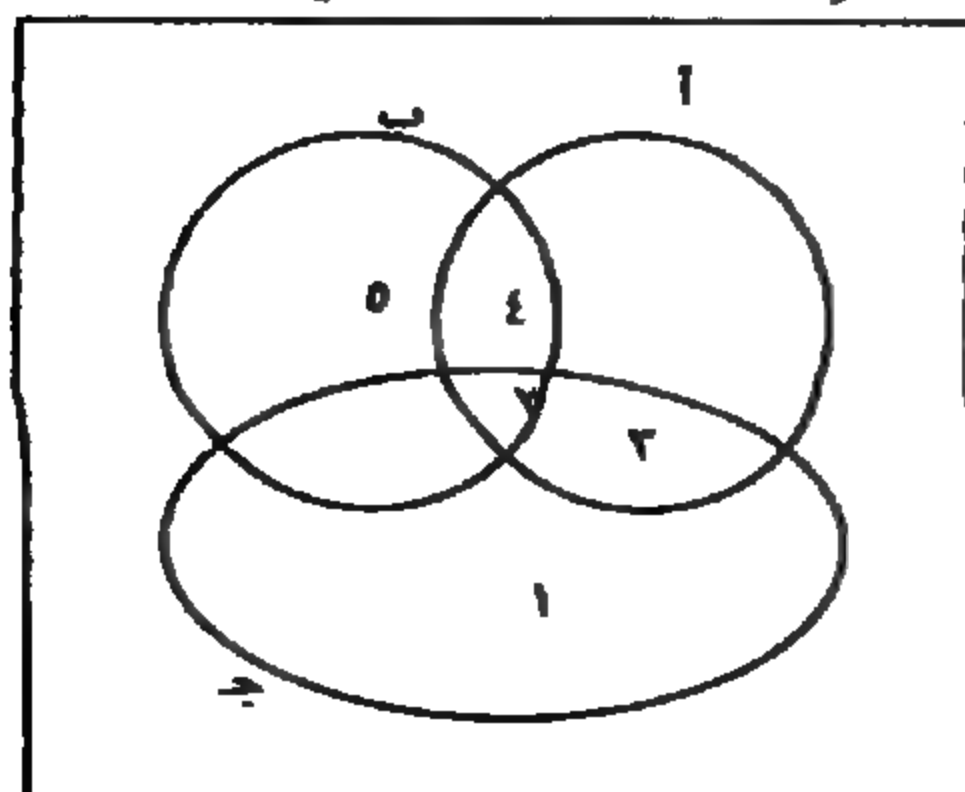
$$(i) \quad A \cap B = \{أ، ب\}$$

$$(ii) \quad A \cap C = \{أ، ج\}$$

$$(iii) \quad A \cup B = \{أ، ب، ج، د، هـ\}$$

$$(iv) \quad A \cup C = \{أ، ج، د، هـ\}$$

ك -  $\{أ، ب، ج، د، هـ\}$



الحل:



## المجموعات والأعداد



ومن المخطط: أ  $\{٢، ٣، ٤\} =$

ب  $\{٢، ٤، ٥\} =$

ج  $\{١، ٢، ٣\} =$





(١- ١٠) الأزواج المرتبة Ordered Pairs:

الزوج المرتب كائن رياضي مؤلف من عنصرين هما  $s_1$  ،  $s_2$  مأخوذين بالترتيب  $s_1$  ثم  $s_2$  على الشكل  $(s_1 , s_2)$  بحيث يسمى العنصر  $s_1$  المسقط الأول First Component ويسمى العنصر الثاني  $s_2$  المسقط الثاني Second Component فالزوج المرتب  $(s_1 , s_2)$  مكون من مسقطين هما:

$s_1$  المسقط الأول

$s_2$  المسقط الثاني

أي أن  $(s_1 , s_2) \neq (s_2 , s_1)$  كون الترتيب اختلف في الزوجين المرتبين وعليه فإن  $(1 , 2) \neq (2 , 1)$  كون كل منهما زوج مرتب يختلف عن الآخر.

هذا ومن الأزواج المرتبة يمكن تكوين مجموعة جديدة تسمى مجموعة الضرب الديكارتي Cartesian Product.

فالضرب الديكارتي لمجموعتين  $S$  ،  $S$  هي مجموعة ثالثة  $S \times S$  (وتقرأ  $S$  ضرب  $S$ ) حيث:

$$(S \times S) = \{(s_1 , s_2) : s_1 \in S \text{ و } s_2 \in S\}$$

وعناصر هذه المجموعة هي الأزواج المرتبة.

وعندما تكون مساقط الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية  $C$  فإنه يرمز لمجموعة الضرب الديكارتي كما يلي:

$$C \times C = \{(s_1 , s_2) : s_1 \in C \text{ و } s_2 \in C \text{ أيضاً}\}$$

مثال:

إذا كانت  $S = \{1 , 2\}$  ،  $S = \{1 , 2\}$



## المجموعات والأعداد



فإن  $S \times S = \{(3, 2), (1, 2), (3, 1), (1, 1)\} = \{3, 1\} \times \{2, 1\}$

وإن  $S \times S = \{(2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\} = \{2, 1\} \times \{3, 1\}$

أي أن  $S \times S \neq S$  فحاصل الضرب الديكارتي ليس تبديلي.

وإن  $S \times S = \{(2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 1)\} = \{2, 1\} \times \{2, 1\}$

وإن  $S \times S = \{(3, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 1)\} = \{3, 1\} \times \{3, 1\}$

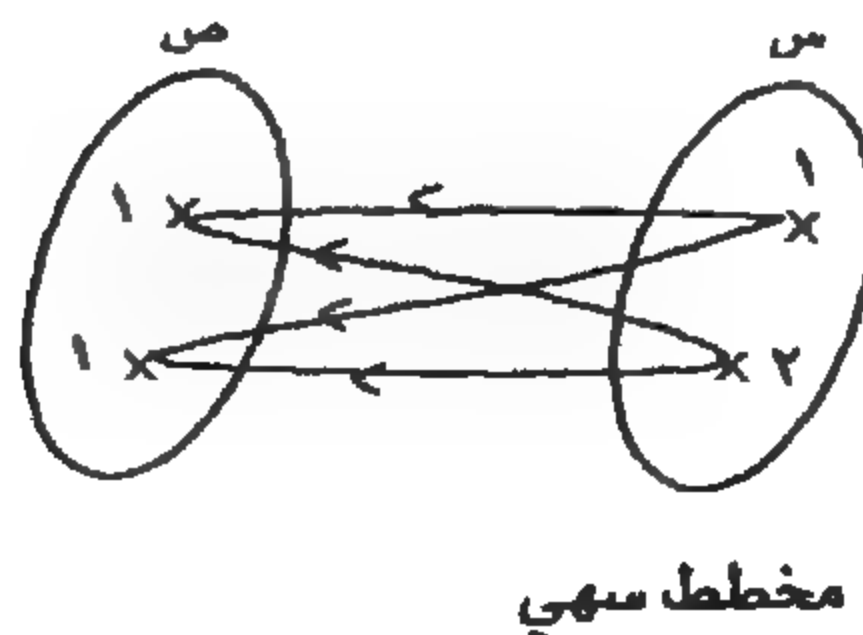
هذا ويمكن تمثيل الضرب الديكارتي للمجموعة  $S \times S$  أعلاه بالطرق

التالية:

(i) طريقة التمثيل الجدولي بأن نضع عناصر المجموعة  $S$  كأعمدة رأسية وعناصر المجموعة  $S$  كأسطر أفقية كما في الشكل.

$\times$	3	1	$= S$
3	(3, 3)	(1, 3)	
1	(3, 1)	(1, 1)	

(ii) طريق التمثيل السهمي وذلك بأن نرسم مخطط فن لكل مجموعة ونصل المساقط الأولى من عناصر المجموعة  $S$  بالمساقط الثانية من عناصر المجموعة  $S$  كما في الشكل:

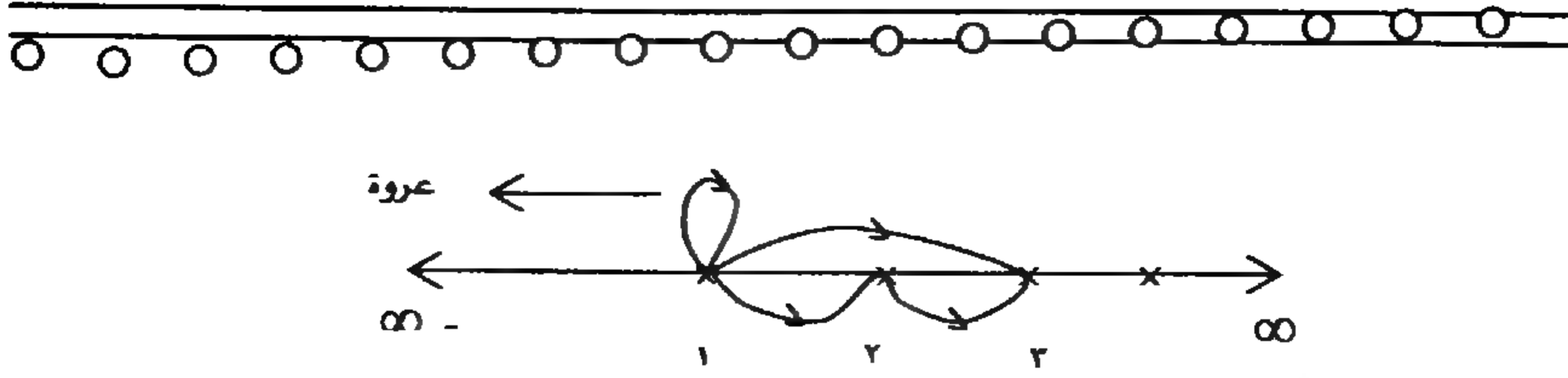


مخطط سهمي

(iii) هذا ويمكن تمثيل مجموعة الضرب الديكارتي بمخطط سهمي على خط الأعداد الحقيقية كما يلي:



## المجموعات والأعداد



وعندما يرتبط العنصر بنفسه أي (1 ، 1) فإننا نسمي الشكل أعلاه عروة Loop حيث العدد 1 كمسقط أول وكمسقط ثاني.

هذا ويتساوى الزوجان المرتبان (س<sub>1</sub> ، ص<sub>1</sub>) ، (س<sub>2</sub> ، ص<sub>2</sub>) اذا ، فقط اذا كان المسقط الأول س<sub>1</sub> = المسقط الأول س<sub>2</sub> في الزوجين المرتبين

والمسقط الثاني ص<sub>1</sub> = المسقط الثاني ص<sub>2</sub> في الزوجين المرتبين

أي أن س<sub>1</sub> = س<sub>2</sub> ، ص<sub>1</sub> = ص<sub>2</sub>

أي أن (س<sub>1</sub> ، ص<sub>1</sub>) = (س<sub>2</sub> ، ص<sub>2</sub>) شرطاً لتساوي الأزواج المرتبة.

مثال:

ما قيمة س ، ص اذا كان (س ، 1) = (2 ، ص)

من تساوي الزوجين المرتبين تتساوى المساقط الأول مع بعضها

أي أن س = 2 والمساقط الثاني مع بعضها أي أن ص = 1

مثال:

اذا كانت س = {1 ، 2 ، 3} ، ص = {أ ، ب}

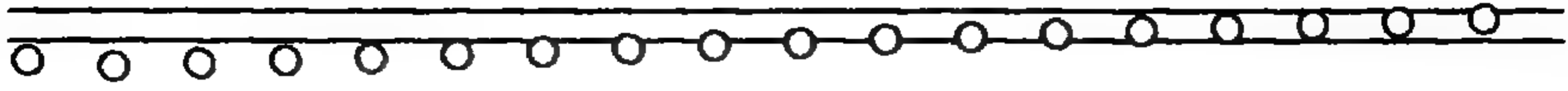
فإن س × ص = {1 ، 2 ، 3} × {أ ، ب} = {(1 ، أ) ، (1 ، ب) ، (2 ، أ) ، (2 ، ب) ، (3 ، أ) ، (3 ، ب)}

لاحظ أن عدد عناصر س × ص = 3 × 2 = 6 أزواج مرتبة

وأن عدد عناصر س × س = عدد عناصر س × عدد عناصر س

= 3 × 3 = 9 أزواج مرتبة.





من هنا يمكن إيجاد عدد عناصر مجموعة الضرب الديكارتية لمجموعة أو أكثر إذا كانت محدودة فقط - بأن نضرب عدد عناصر كل من المجموعات المكونة لحاصل الضرب الديكارتية كما يلي:

إذا كان عدد عناصر المجموعة  $S = 5$  وعدد عناصر المجموعة  $V = 4$

فإن عدد عناصر المجموعة  $S \times V = 5 \times 4 = 20$  زوج مرتب

وكذلك عدد عناصر المجموعة  $V \times S = 4 \times 5 = 20$  زوج مرتب

وعدد عناصر المجموعتين  $S$  ،  $V$  يساوي  $n_1$  ،  $n_2$  على التوالي

فإن عدد عناصر  $S \times V$  وكذلك  $V \times S$  هو  $n_1 \times n_2$  أو  $n_2 \times n_1$  وكلاهما متساويان.

■ والآن سنورد خصائص مجموعة الضرب الديكارتية على شكل قوانين ونظريات مصحوبة بالبيان والتوضيح كما يلي:

للمجموعات  $S = \{1, 2, 3\}$  ،  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ، والمجموعة الخالية أيضاً:

$$E = \{1, 2, 3, 4\} \text{ فإن:}$$

$S \times V \neq V \times S$  فالضرب الديكارتية غير تبديلي

$S \times \phi = \phi \times S = \phi$  كون لا عناصر بها، حالة خاصة تجعل الضرب الديكارتية فيها تبديلي.

$\times$  لإيجاد  $S \times (E \cup V)$  نقول:

$$S \times \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \dots (2)$$

ولإيجاد  $(S \times E) \cup (S \times V)$  نقول:

$$\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$

كون  $\{1, 2, 3\}$  مشترك





## المجموعات والأعداد



$$(\{1, 2, 3\}) \times (\{1, 2, 4, 5\}) \dots (2)$$

$$(S \times E) \cup (S \times V) = (E \cup V) \times S$$

فالضرب الديكارتي توزيعي بالنسبة لعملية الاتحاد

$$(S \times E) \cap (S \times V) = (E \cap V) \times S$$

والضرب الديكارتي توزيعي بالنسبة لعملية التقاطع

(تحقق من ذلك)

\* إذا كان عدد عناصر المجموعة  $S$  هو  $n_1$

وكان عدد عناصر المجموعة  $V$  هو  $n_2$

فإن:

$$\text{عدد عناصر المجموعة } S \times V = n_1 \times n_2$$

$$\text{عدد عناصر المجموعة } S \times E = n_1 \times n_2$$

$$\text{عدد عناصر المجموعة } S \times S = n_1 \times n_1$$

$$\text{عدد عناصر المجموعة } V \times V = n_2 \times n_2$$

وهكذا...



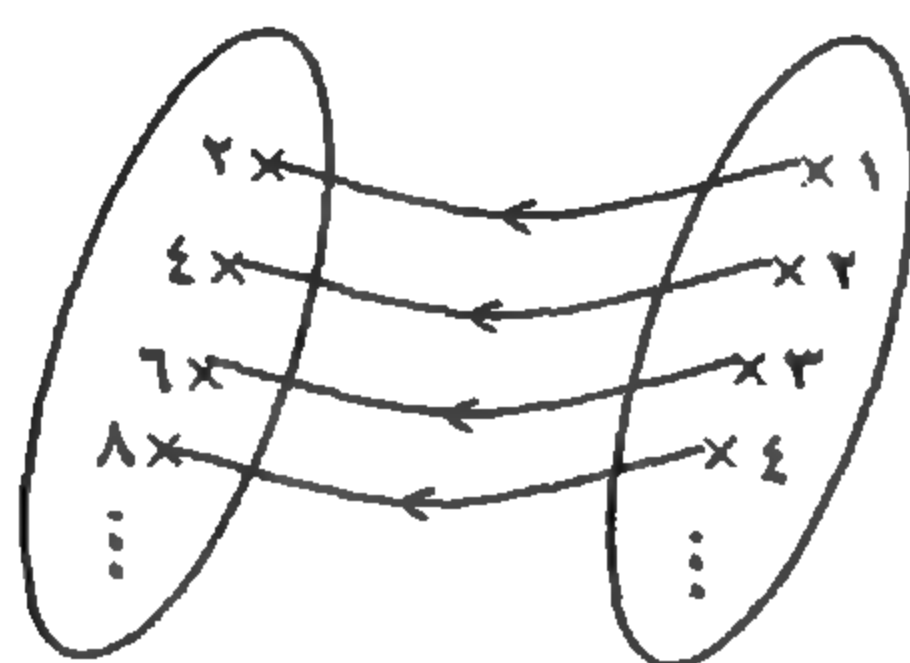
## (١- ١١) العلاقات Relations:

والعلاقة إما أن تكون أحادية أو ثنائية وتفسير كل منهما كما يلي:

### العلاقة الأحادية:

وهي ارتباط بين عناصر مجموعتين تسمى الأولى منها المجال Domain وتسمى الثانية Range كأن تكون علاقة مساواة أو تباين أو أي خاصية تربط بين مجموعتين فقط، فإذا كونا من مجموعة الأعداد الطبيعية ط\* = {١ ، ٢ ، ٣ ، ...} مجموعة الأعداد الزوجية ز = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ...} فإننا نقول بأننا عرفنا علاقة خاصة على مجموعة الأعداد الطبيعية وهذه العلاقة ع تقسم المجموعة ط\* الى مجموعتين جزئيتين منفصلتين هما الأولى ز تحقق العلاقة المذكورة. والثانية ف مجموعة الأعداد الفردية ف = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ...} والتي لا تحقق هذه العلاقة.

والتمثيل باشكال فن:



وهكذا تسمى هذه العلاقة ع : ط\* ← ز

علاقة أحادية معرفة على المجموعة المفروضة ط\*

### وأما العلاقة الثنائية Binary Relation:

فهي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي لمجموعتين س ، ص مثلاً أي أن العلاقة ع: مجموعة جزئية من س × ص وتسمى العلاقة من س الى ص كما في المثال:



## المجموعات والأعداد

إذا كانت  $S = \{2, 3, 5\}$ ،  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

فإن:

$$E_1 = \{(2, 4), (2, 6), (5, 10)\} \text{ وقاعدتها } V = S$$

$$E_2 = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \text{ وقاعدتها } V = S$$

$$E_3 = \{(2, 7), (2, 5), (3, 2), (3, 10)\} \text{ ولا قاعدة لها على الإطلاق}$$

وإذا كان العنصر (أ، ب) ينتمي إلى العلاقة المعنية  $E$  فإننا نعبّر عنه بالرمز

$A \in B$  أو (أ، ب)  $\in E$  كأن نقول:

$E_1$  أي أن  $(2, 4) \in E_1$  كما في العلاقة الأولى

وكذلك  $E_2$  أي أن  $(2, 2) \in E_2$  كما في العلاقة الثانية

ومن الملاحظ أن مجموعة المساقط الأول في العلاقة تسمى المجال

ومجموعة المساقط الثانية تسمى المدى

فمجال  $E_1$  هو  $\{2, 3, 5\}$  ومداه  $\{4, 6, 10\}$

ومجال  $E_2$  هو  $\{2, 3, 5\}$  ومداه  $\{2, 3, 5\}$

فمجال  $E_3$  هو  $\{2, 3\}$  ومداه  $\{2, 5, 7, 10\}$

وللعلاقات الثنائية من الخواص ما هو العديد ولكن سنحصرها بشكل

موجز ومفيد كما يلي:

للمجموعة  $S = \{1, 2, 3\}$  ومجموعة الضرب الديكارتية لها:

$S \times S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$\{(2, 2), (3, 3)\}$



## المجموعات والأعداد



فإذا كان:

$\times$  للمتغير  $s_1$  علاقة  $r_1$  مع نفسه كما يلي  $s_1$  ع  $s_1$  ، فالعلاقة  $r_1$  تسمى علاقة انعكاس Reflexive Relation. كعلاقة المساواة  $r_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

إذ يسمى كل زوج مرتب منها حيث  $1, 1$  ،  $2, 2$  ،  $3, 3$  عروة Loop وتمثل هذه العلاقة بمخطط سهمي عددي هكذا:



بحيث أن عدد العُرى يساوي عدد عناصر المجموعة  $s$

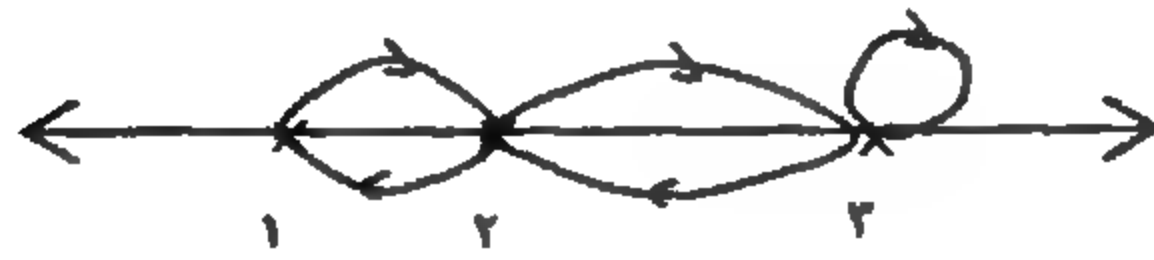
وفي هذا المثال 3 عُرى فقط.

أما علاقات التباين  $>$  (أصغر من) أو  $<$  (أكبر من) فليست علاقات انعكاس.

وإذا كان للمتغير  $s_1$  علاقة  $r_1$  مع المتغير  $s_2$  وكذلك كان في نفس العلاقة  $r_2$  ، للمتغير  $s_2$  مع المتغير  $s_1$  هكذا:

$s_1$  ع  $s_2$  ←  $s_2$  ع  $s_1$  فالعلاقة تسمى علاقة تناظر Symmetric Relation  
كالعلاقة  $r_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (2, 3)\}$

وتمثيلها بمخطط سهمي عددي كما يلي:



ثم إذا كان للمتغيرات  $s_1$  ،  $s_2$  ،  $s_3$  الارتباطات التالية في العلاقة  $r_3$ :

$s_1$  ع  $s_2$  ، وكذلك  $s_2$  ع  $s_3$  وكان  $s_1$  ع  $s_3$

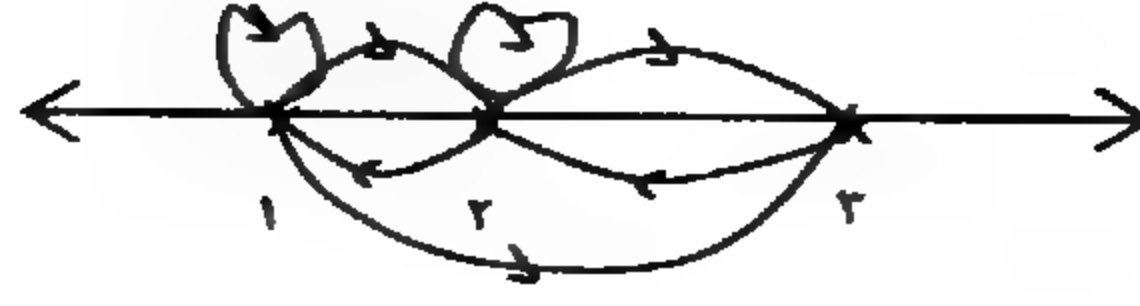
تكون العلاقة  $r_3$  علاقة تعد Transitive Relation

كالعلاقة  $r_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 1)\}$

## المجموعات والأعداد



وتمثيلها بالمخطط السهمي:



فعلاقة المساواة ان كنت لا تدري علاقة تعدي كون:

$$s_1 = s_2 \leftarrow s_2 = s_1, s_2 = s_2, s_1 = s_1$$

وأخيراً اذا كانت العلاقة ع، علاقة انعكاس (كما في ع)

وعلاقة تماثل كما في ع، وعلاقة تعدد كما في ع

فإن العلاقة ع، تسمى علاقة تكافؤ Equivalence Relation

$$\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)\} = \text{علاقة ع}$$

وتمثيلها بالمخطط السهمي العديد



فعلاقة المساواة على أي مجموعة من المجموعات العددية (ط، ط\*، ط، س، ك، ح)

وعلاقة التشابه على مجموعة من جميع المثلثات المرسومة في مستوى واحد.

ثم علاقة التوازي على مجموعة الخطوط المستقيمة المستوية.

جميع هذه العلاقات (المساواة، التشابه، التوازي) علاقات تكافؤ.

وأما علاقات التباين مثل أكبر من < ، وأصغر من > فليست علاقات تكافؤ.

هذا وتستخدم علاقات التكافؤ بشكل عام في التصنيف الرياضي

وتكون ما يسمى بصفوف التكافؤ Equivalence Classes .





## المجموعات والأعداد



فالأشكال الهندسية مثلاً تُقسم الى صفوف تكافؤ من حيث الشكل

والخواص الى:

مثلثات ، مربعات ، مستطيلات ، دوائر ، وغيرها.

والأعداد الصحيحة ص مثلاً تقسم بواسطة علاقة التكافؤ الى مجموعتين

هما:

مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية ز

$$Z = \{ \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \}$$

ومجموعة الأعداد الفردية ف

$$F = \{ \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \}$$

وأما تمثيل العلاقات الثنائية يكون كما يلي:

$$\{1, 2, 3\} = S, \{2, 4, 6, 8\} = V$$

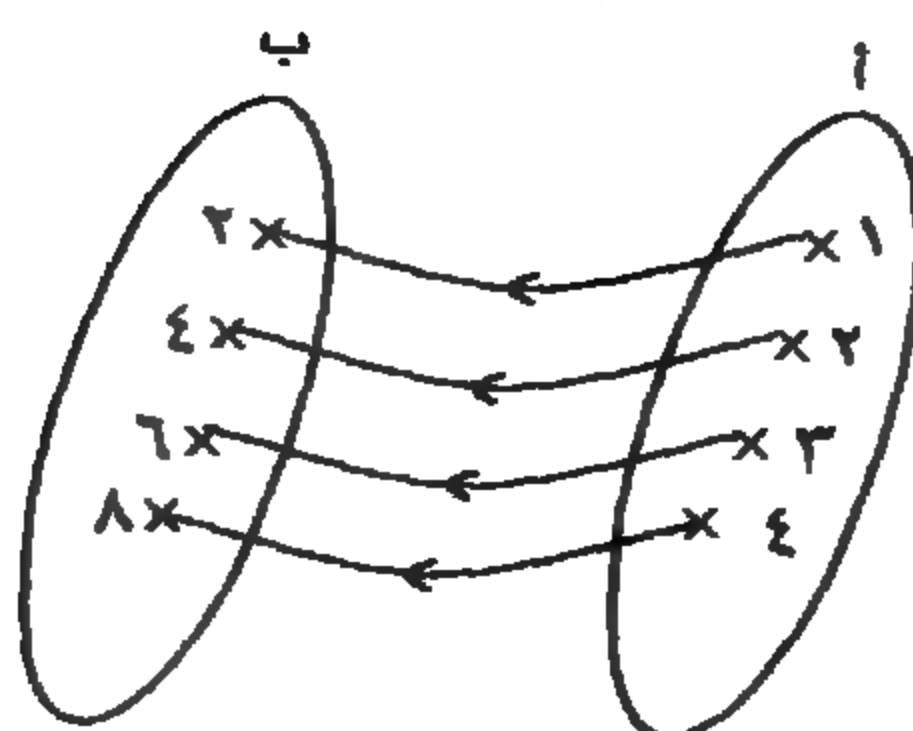
وكانت العلاقة ع من أ الى ب حسب القاعدة  $V = 2S$

فإن العلاقة ع تمثل بالطرق التالية:

أولاً: بطريقة الأزواج المرتبة:

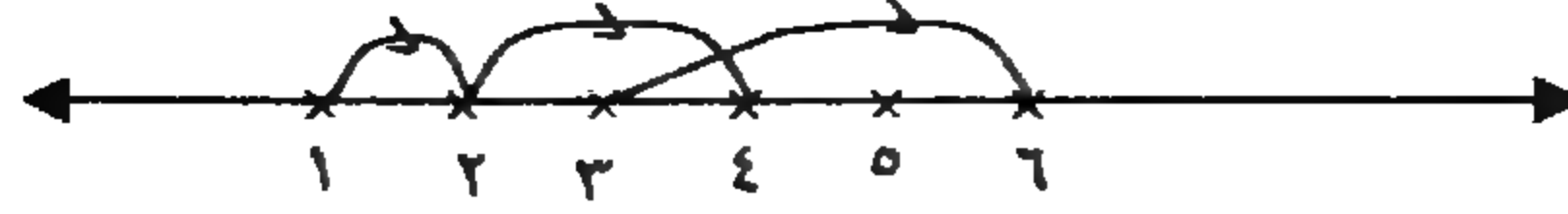
$$E = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

ثانياً: بطريقة المخطط السهي هكذا:





ثالثاً: بطريقة المخطط السهمي العددي هكذا:



مثال:

إذا كانت  $S = \{أ ، ب ، ج\}$  حدد العلاقة ع من حيث هي انعكاس، تماثل ، تعدي ، تكافؤ.

ع<sub>١</sub> =  $\{(أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (ج ، ج) ، (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (ج ، ب) ، (ب ، ج) ، (أ ، ج) ، (ج ، أ)\}$  جواب: انعكاس وتعدي

ع<sub>٢</sub> =  $\{(أ ، أ) ، (ج ، ج) ، (ب ، ب)\}$  جواب: تماثل ، تعدي

ع<sub>٣</sub> =  $\{(ب ، ب)\}$  جواب: تماثل ، تعدي

ع<sub>٤</sub> =  $\{(أ ، أ) ، (ب ، ب) ، (ج ، ج) ، (أ ، ب) ، (ب ، أ) ، (ج ، ب) ، (ب ، ج) ، (أ ، ج) ، (ج ، أ)\}$  جواب: "تكافؤ"

"كونها انعكاس وتماثل وتعدي"



## (١ - ١٢) الاقترانات Functions:

سنناقش مفهوم الاقتران كونه من أهم المفاهيم الرياضية وأكثرها فائدة وأوسعها انتشاراً في الرياضيات.

والاقتران علاقة بين عناصر مجموعتين مثل أ ، ب بحيث يرتبط فيه كل عنصر من عناصر المجموعة أ بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة ب ، لذلك يقال الاقتران من المجموعة أ الى المجموعة ب.

وعندها تصبح المجموعة أ مجاله Domain والمتغير فيها يسمى:

المتغير المستقل Independent

وتصبح المجموعة ب مداه Range والمتغير فيها يسمى:

المتغير التابع Dependent Variable

ويرمز للاقتران بالرمز  $v = f(s)$  حيث:

س متغير مستقل

ص متغير تابع

والاقترانات التي مجالها ومداهها مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية ح تسمى:

الاقترانات الحقيقية Real Functions

ويتمدد الاقتران الحقيقي بقاعدة معينة تربط متغيرة التابع بمتغيره المستقل هكذا:

$v = f(s)$  مثلاً ولكن ليس دائماً.

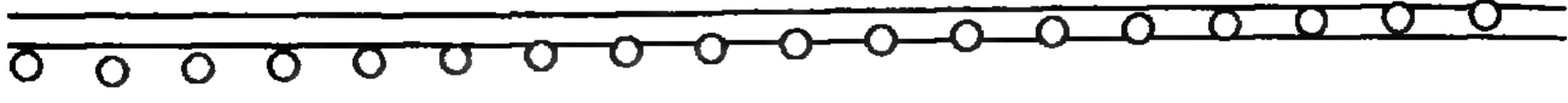
في هذه المقدمة على الاقتران سنناقش بإيجاز بعض أنواعه كما يلي:

× الاقتران الثابت Constant Function:

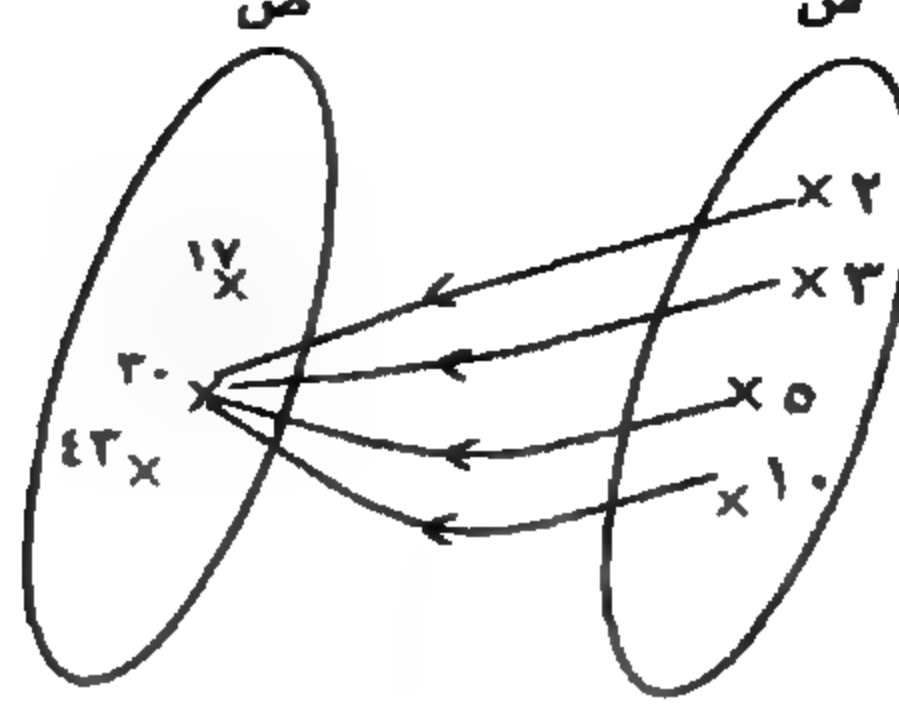
إذا كانت  $s = \{2, 3, 5, 10\}$  ،  $v = \{17, 30, 43\}$



## المجموعات والأعداد



فالاقتران المعرف بالقاعدة، كل عنصر من المجموعة ص من مضاعفات  
عنصر من المجموعة س هكذا:



أي أن جميع العناصر في المجموعة س ترتبط بالعنصر ٣٠ من المجموعة ص  
أي أن مجاله المجموعة س ومداه العنصر ٣٠ فقط من المجموعة ص.  
وبما أن العدد ٣٠ هو صورة لجميع عناصر المجموعة س في هذا الاقتران  
ويعبر عنه هكذا:

$$٣٠ = (٢) ق ، ٣٠ = (٣) ق ، ٣٠ = (٥) ق ، ٣٠ = (١٠) ق$$

× الاقتران المحايد Identity Function:

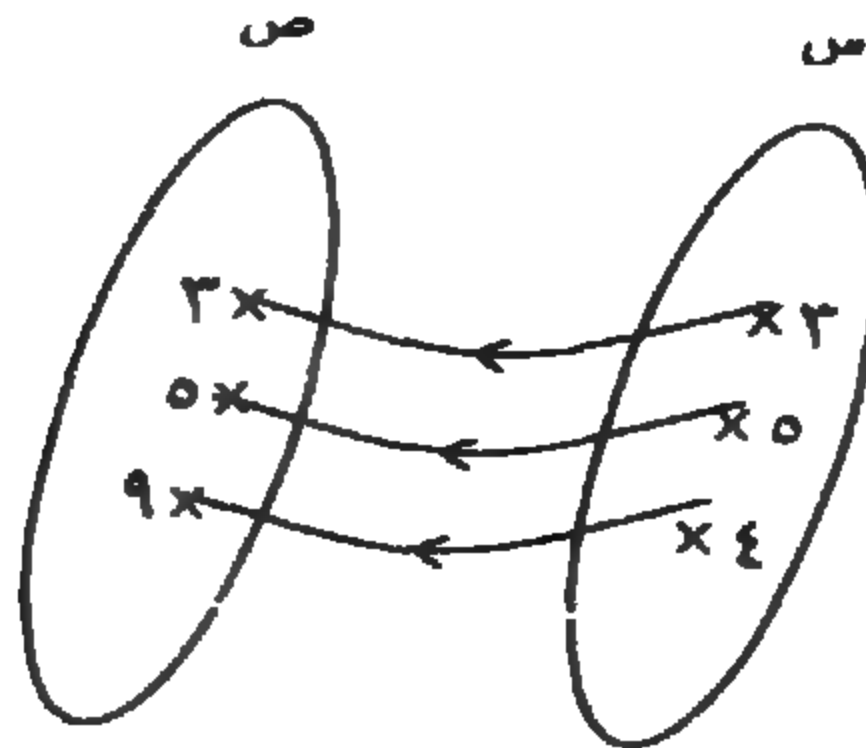
مثال:

إذا كانت  $S = \{٣ ، ٥ ، ٩\}$  وكانت قاعدة الاقتران ق (س) = س

وكان الاقتران من س الى س فإن:

$$٣ = (٣) ق ، ٥ = (٥) ق ، ٩ = (٩) ق$$

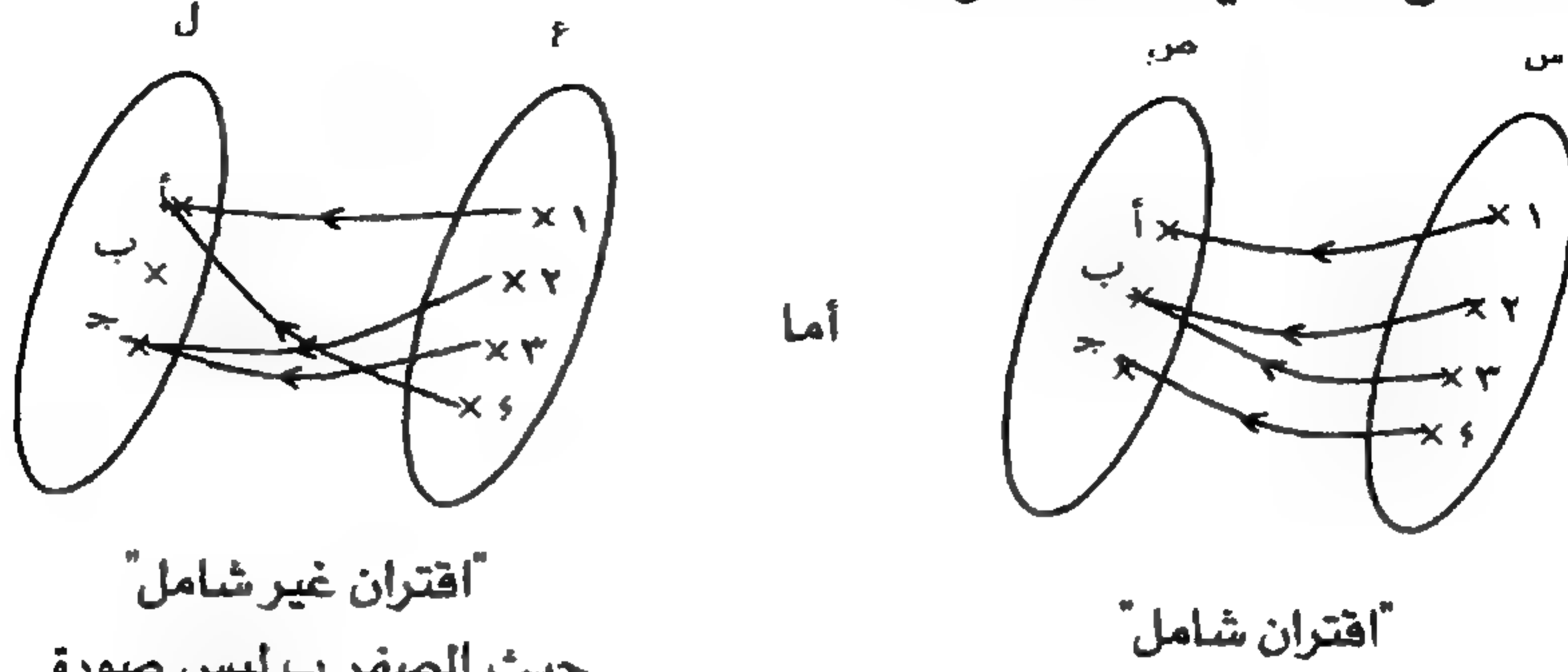
أي أن العنصر يرتبط بنفسه أو العنصر صورة نفسه كما في الشكل:





× اقتران شامل Onto Function:

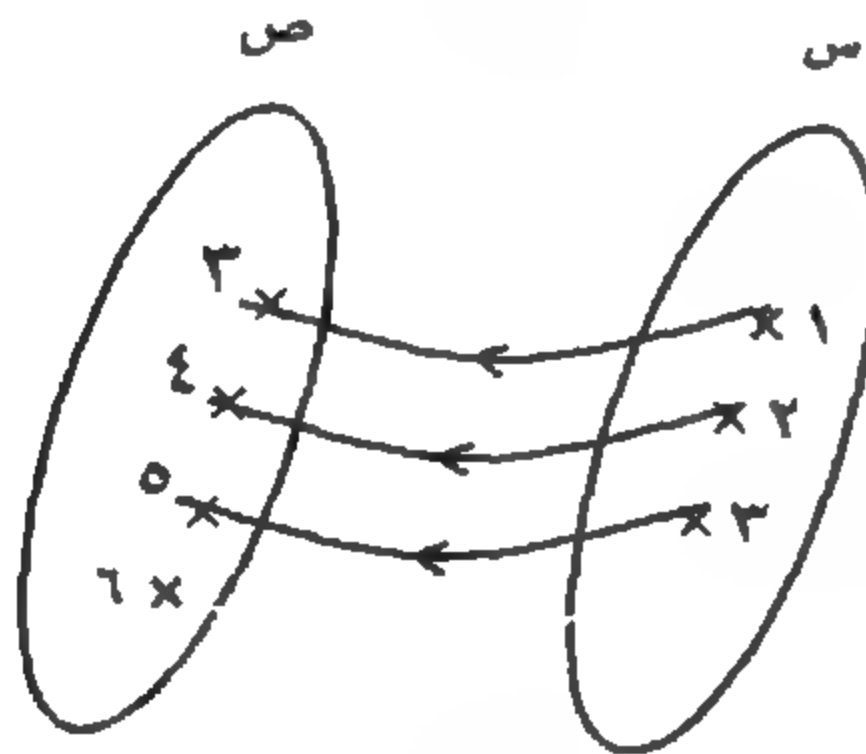
هو الاقتران الذي تكون فيه جميع عناصر المدى صوراً لعناصر المجال دون زيادة أو نقصان كما في الأشكال:



"اقتران غير شامل"  
حيث الصفر ب ليس صورة  
لأي عنصر في المجال

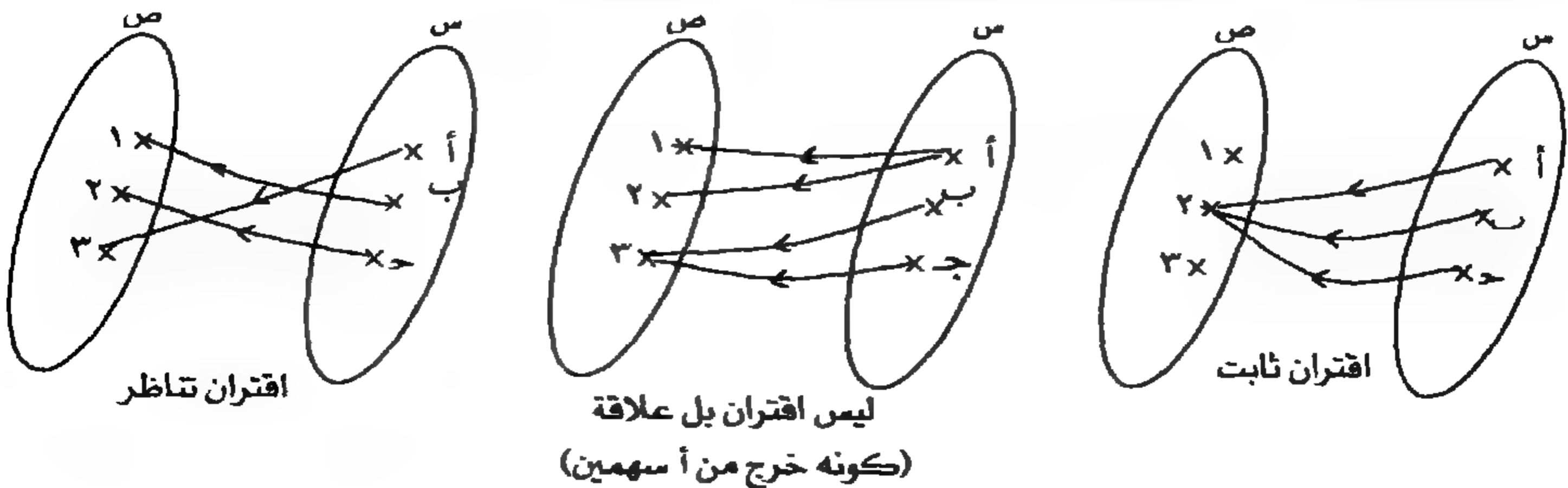
× اقتران واحد لواحد One- one Function:

هو الاقتران الذي يكون فيه لكل عنصر في مجاله صورة واحدة في مداه وليس شاملاً هكذا:



× اقتران تناظر One- one and Function:

هو الاقتران الأهم من غيره من الاقترانات، وهو اقتران شامل أولاً ثم واحد لواحد ثانياً. أي أن كل عنصر في مجاله يرتبط بصفر واحد في مداه. وجميع عناصر مداه تكون صوراً لعناصر مجاله كما في الشكل:







(١ - ١٣) الأنظمة الرياضية Mathematical Systems:

والنظام الرياضي اثنان هما:

\* نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة، وهو زوج مرتب، مسقطه الأول مجموعة غير خالية - مملوءة Full - ومسقطه الثاني عملية رياضية ثنائية مثل النظام الرياضي التالي (ط\* ، +) حيث:

ط\* مجموعة غير خالية كونها ط\* = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠} مجموعة الأعداد الطبيعية.

+ عملية الجمع والتي تربط كل زوج مرتب من عناصر مجموعة الضرب الديكارتي (ط\* × ط\*) بعنصر واحد فقط من المجموعة ط\*

وبالرموز ط\* × ط\* عملية الجمع ط\*

ومثاله (٢ ، ٢) ٣ ← ٥

حيث ٥ = ٢ + ٢ كما هو معروف سابقاً.

\* \* نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين وهو ثلاثي مرتب،

مسقطه الأول مجموعة غير خالية - مملوءة full - مثل ح الأعداد الحقيقية.

ومسقطاه الثاني والثالث عمليتان كل منهما ثنائية مثل النظام الرياضي.

(ح ، + ، ×) مع ملاحظة أن (ح ، +) نظام رياضي ذو عملية.

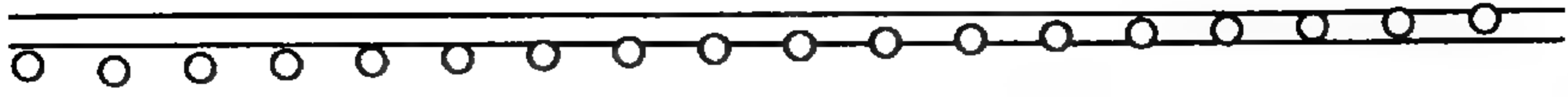
و (ح\* ، ×) نظام رياضي ذو عملية.

ومنه النظام الرياضي (ح ، + ، ×) نظام رياضي ذو عمليتين.

مثل ٥ = ٢ + ٢ في هذا النظام.

وكذلك ٦ = ٢ × ٣ في هذا النظام.





ومن أشهر الأنظمة الرياضية ذات العملية الثنائية الواحدة النظام:

(ط<sup>\*</sup> ، +) والنظام (ط<sup>\*</sup> ، ×).

لذا فإنني سأناقش العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الطبيعية ط<sup>\*</sup> وعلى وجه الخصوص عملية الجمع (+) وعملية الضرب (×) كما يلي:

يُعتبر العدد الطبيعي أول مفهوم رياضي أوجده الانسان، بسبب حاجته الماسة لتعداد الأشياء المحيطة به من كل جانب وفي كل مكان.

أما عملية الجمع Addition على مجموعة الأعداد الطبيعية ط<sup>\*</sup> فإنها تُعرّف كما يلي:

$$(s, v) \xrightarrow{+} s + v, \text{ لكل } s, v \in \mathbb{N}^*$$

وأما عملية الضرب Multiplication على مجموعة الأعداد الطبيعية ط<sup>\*</sup> فإنها تُعرّف كما يلي:

$$(s, v) \xrightarrow{\times} s \times v, \text{ لكل } s, v \in \mathbb{N}^*$$

ويمكن أن تكتب  $s \times v$  على الشكل  $s \cdot v$  أو  $sv$ .

كون العملية الثنائية (+) تربط كل زوج مرتب (s, v)  $\in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  بصفر واحد يسمى  $s + v \in \mathbb{N}^*$

$$\text{ومثاله: } (2, 3) \xrightarrow{+} 2 + 3 = 5 \in \mathbb{N}^*$$

وكون العملية الثنائية (×) تربط كل زوج مرتب (s, v)  $\in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  بصفر واحد يسمى  $s \times v$  أو  $s \cdot v$  أو  $sv \in \mathbb{N}^*$

$$\text{ومثاله: } (2, 3) \xrightarrow{\times} 2 \times 3 = 6 \in \mathbb{N}^*$$

ولأن المجموعة ط<sup>\*</sup> لا تحتوي الصفر بين عناصرها







## (١ - ١٤) الزمر Groups:

الزمرة نظام رياضي ذو عملية ثنائية واحدة مثل (ج ، هـ)

حيث ج مجموعة غير خالية، هـ عملية ثنائية.

وحتى تتشكل الزمرة (ج ، هـ) من النظام الرياضي المذكور يجب أن تتحقق في النظام الرياضي الشروط التالية معاً:

لكل أ ، ب ، ج  $\exists$  ج ،  $أ \circ (ب \circ ج) = (أ \circ ب) \circ ج$  الخاصية التجميعية

$\times$  للنظام (ج ، هـ) عنصر محايد هو  $٠$  هـ  $٠ \circ ج = ج$  حيث:

لكل هـ  $\exists$  ج  $\leftarrow هـ \circ أ = أ \circ هـ = أ$  ، لكل أ  $\exists$  ج

$\times$  يوجد في النظام (ج ، هـ) نظير لكل عنصر مثل أ ،

أي لكل أ  $\exists$  ج  $أ^{-١}$  حيث  $أ \circ أ^{-١} = أ^{-١} \circ أ = هـ$

حيث  $أ \circ أ^{-١} = أ^{-١} \circ أ = هـ$

فإذا ما تحققت الشروط الثلاثة السابقة فإن النظام (ج ، هـ) يسمى زمرة مثل:

النظام الرياضي (ص ، +) حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

$$(-٧) + (٣ + ٢) = (-٧ + ٣) + ٢$$

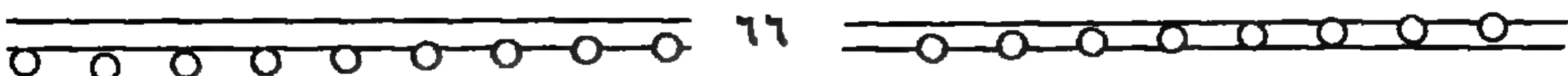
$$(-٧) + ٥ \quad (-٤) + ٢$$

$$٢ - = \quad ٢ - =$$

والصفر عنصر محايد للجمع حيث  $٥ + \text{صفر} = \text{صفر} + ٥ = ٥$

للمصفر  $٥$  نظير جمعي هو  $-٥$  والعكس صواب

لأن  $٥ + (-٥) = (-٥) + ٥ = \text{صفر}$





وإذا كان  $a \neq b$  ، لكل  $a$  ،  $b$  ج فإن:

الزمرة (ج، هـ) تسمى زمرة تبديلية أو أبيلية Ableian Group نسبة الى الرياضي النرويجي آبل Abel (١٨٠٢ – ١٨٢٩)م مع ملاحظة أن (ص، +) زمرة تبديلية حيث:

$$7 + 5 = 5 + 7 \text{ لأن الطرفين يساويان العدد الصحيح } ١٢$$

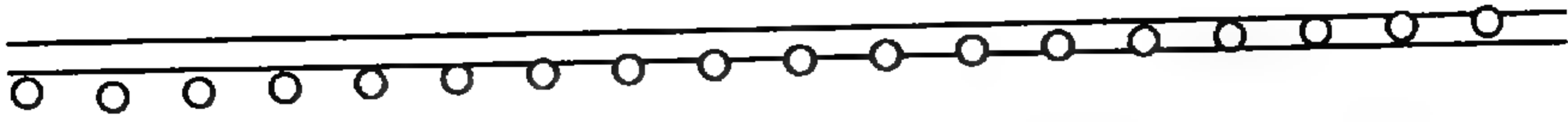
$$\text{وكذلك } -5 + 9 = 9 + -5 \text{ لأن الطرفين يساويان العدد الصحيح } ٤$$

ومن أشهر الزمر على الإطلاق الزمر العددية التالية:

(ص، +) حيث ص الأعداد الصحيحة

(ك، +) ، (ك، ×) حيث ك الأعداد النسبية و ك\* الأعداد النسبية المغايرة للصفر

(ح، +) ، (ح، ×) حيث ح الأعداد الحقيقية، و ح\* الأعداد الحقيقية المغايرة للصفر.



## (١- ١٥) الحلقات Rings:

الحلقة نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مثل (ج ، ٥ ، ×)

وحتى تتشكل الحلقة من النظام المذكور يجب أن تتحقق في النظام الشروط التالية:

× (ج ، ٥) زمرة تبديلية مثل (ص ، +) حيث ص الأعداد الصحيحة

× و (ج ، ×) نظام رياضي ذو عملية واحدة "تجميعي فقط"

أي أ × (ب × ج) = (أ × ب) × ج مثل (ص\* ، ٠)

× ثم تتوزع العملية ٥ على العملية × في النظام توزيعي:

أي أن أ × (ب × ج) = (أ × ب) × ج لكل أ ، ب ، ج ∃ ج

مثال:

$$(٧ × ٥) + (٦ × ٥) = (٧ + ٦) × ٥$$

$$٦٥ = ٣٥ + ٣٠ =$$

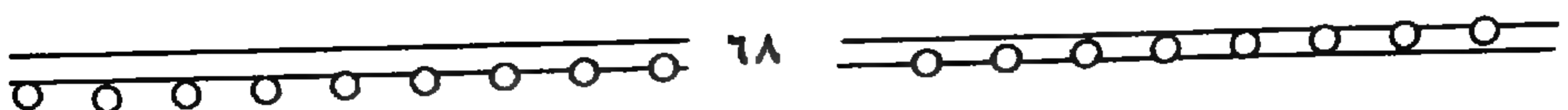
لذا فإن النظام (ص ، + ، ×) حلقة وهي أشهر حلقة في الرياضيات وتسمى حلقة الأعداد الصحيحة Integers Ring وتكتب على الصورة (ص ، + ، ×) حيث الضرب يرمز له أحياناً بالنقطة (٠) فالحلقة (ص ، + ، ×) نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مكون من ثلاثي مرتب حيث:

$$\{٠، ١±، ٢±، ٣±، ٠٠٠\} = \text{مستقطه الأول المجموعة ص}$$

ومستقطه الثاني عملية الجمع + العادية الثنائية والمعرفة كاقتران هكذا:

$$\text{ص ، ص} \xrightarrow{+} ٢ \text{ ص}$$

$$\text{أي أن } (٢ ، ٢) \xrightarrow[\text{الجمع}]{+} ٥ = ٢ + ٢$$





## المجموعات والأعداد



ومسقطه الثالث عملية الضرب العادي (٠) الثنائية والمعرفة كاقتران هكذا:

$$\text{ص} ، \text{ص} \xrightarrow{\text{الضرب}} \text{ص}^2$$

$$\text{أي أن } (٢ ، ٣) \xrightarrow{\text{الضرب}} ٦ = ٢ \times ٣$$

هذا ومجموعة الأعداد الصحيحة تتألف من الأعداد السالبة والصفر والموجبة هكذا:

$$\text{ص} = \text{ص}^- \cup \{0\} \cup \text{ص}^+$$

والصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع في حلقة الأعداد الصحيحة. والأعداد الصحيحة السالبة هي النظائر للأعداد الصحيحة الموجبة وبالعكس.

حيث العدد - ٥ نظير جمعي للعدد ٥ كون  $(٥ -) + ٥ = ٥$  صفر المحايد

والعدد ٥ نظير جمعي للعدد  $(٥ -)$  كون  $(٥ -) + ٥ = ٥$  صفر المحايد

مع ملاحظة أن العددين السالب والموجب يمثلان وضعين متعاكسين بالنسبة الى الصفر،

حيث العدد السالب يقع شماله على خط الأعداد

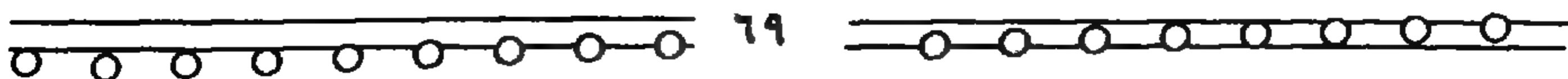
والعدد الموجب يقع على يمينه على نفس الخط كما في الشكل



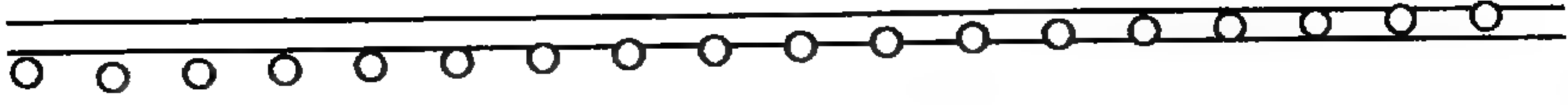
وهناك مواقف عديدة تظهر وضعين متعاكسين في الحياة العملية مثل المكسب والخسارة في التجارة،

فإذا رمزنا للمكسب بالاشارة (+)

فرمز الخسارة اشارة (-) بالتأكيد.



## المجموعات والأعداد



وإذا رمزنا لدرجات الحرارة فوق الصفر بالإشارة (+)

فرمزها تحت الصفر بالإشارة (-) بالتأكيد

هذا ونستطيع أن نمثل الأعداد الصحيحة بنقط منفصلة على خط الأعداد الذي لا بداية له  $(-\infty)$  ولا نهاية  $(\infty)$  كما هو واضح على خط الأعداد، ومن الملاحظ أنه كلما اقتربنا من الصفر فإن قيمة العدد الموجب تقل، وكلما ابتعدنا عن الصفر تزداد قيمة العدد الموجب. لذا فإن الصفر أصغر من العدد ١ والعدد ١ أصغر من العدد ٢ وهكذا.

وكلما اقتربنا من الصفر تزداد قيمة العدد السالب، وكلما ابتعدنا عن الصفر تقل قيمته.

لذا فإن الصفر أكبر من -١ والعدد -١ أكبر من -٢ وهكذا..

ومن هنا نشأ ما يسمى بالقيمة المطلقة Absolute Value للأعداد ورمزها  $| \cdot |$  وتعرف:

$| \cdot |$  بأنها عدد الوحدات التي تمثل بعد ذلك العدد  $a$  عن الصفر وعلى خط الأعداد. وكون بعد العدد -٥ عن الصفر = ٥ وحدات مع ملاحظة أن -٥ على يسار الصفر.

وكون بعد العدد ٥ عن الصفر = ٥ وحدات أيضاً مع ملاحظة أن ٥ على يمين الصفر.

$$\text{فإن } | -٥ | = | ٥ | = ٥$$

وللقيمة المطلقة  $| \cdot |$  خصائص عدة نوضح بعضها بالأمثلة فقط كما يلي:

$$(i) | s - | = | s |$$

$$\text{فعندما } s = ٥$$

$$\text{فإن } | ٥ - | = | ٥ | = ٥$$





وعندما  $s = -v$

$$v = |v| = |(-v) -| = |-v|$$

(ii)  $|s - v| = |s - (-s)| = |2s|$  لكل  $s$ ،  $v$  أعداد صحيحة

عندما  $s = v$ ،  $v = 0$

$$|v - 0| = |0 - v|$$

$$2 = |2 -| = |2|$$
 أي أن

"علماً بأنه يوجد خصائص أخرى توضح في مكان آخر من المؤلف"

والآن سنناقش كيفية إجراء العمليات الرياضية المتنوعة ضمن حلقة الأعداد

الصحيحة (ص، +، ٠):

بعد أن اكتشف الإنسان أن مجموعة الأعداد الكلية  $\mathbb{N} \cup \{0\}$

عاجزة عن استيعاب الأعداد التي تصف بعض المواقف في الحياة العملية كخسارة

التاجر لمبلغ ١٠٠ دينار مثلاً وقياس درجة حرارة ٧ تحت الصفر وعمق وادٍ مقداره ٢٠

متراً تحت سطح البحر وغيرها من المواقف، فكرَ بإيجاد مجموعة أخرى من

الأعداد تضم أعداداً تصف تلك المواقف فكانت مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

وكانت حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، ٠) التي أنتجت أعداداً صحيحة سالبة

تصف مثل تلك المواقف،

فالخسارة نعبر عنها - ١٠٠ دينار

ودرجة الحرارة تحت الصفر نعبر عنها - ٧°س

وانخفاض الوادي تحت سطح البحر نعبر عنه - ٢٠ متراً وهكذا..

ولنناقش العمليات في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، ٠) نبدأ:



## المجموعات والأعداد



"جمع الأعداد الصحيحة"

مثال:

أوجد ناتج جمع كلا من:

$$5 + 3$$

$$5 + 3 -$$

$$(5 -) + (3 -)$$

$$(5 -) + 3$$

للتوصل الى الجواب الصواب سنسلك طريقاً ثلاث للجمع:

لإيجاد ناتج الجمع ذاك نبدأ باستخدام خط الأعداد Numbers Line

$$88 = (5+3) \times$$



ابدأ من الصفر وتحرك يميناً بمقدار 3 وحدات لتصل الى العدد 3 ثم تابع  
تحرك يميناً أيضاً بمقدار 5 وحدات لتصل الى العدد 8.

$$8 = 5 + 3$$

$$88 = 5 + (3 -) \times$$

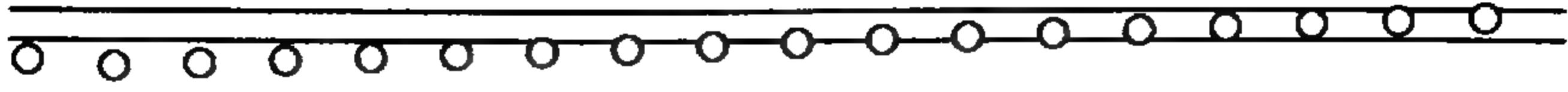


ابدأ من الصفر وتحرك يساراً بمقدار 3 وحدات لتصل الى العدد -3 ثم  
تحرك يميناً بمقدار 5 وحدات لتصل الى العدد 2

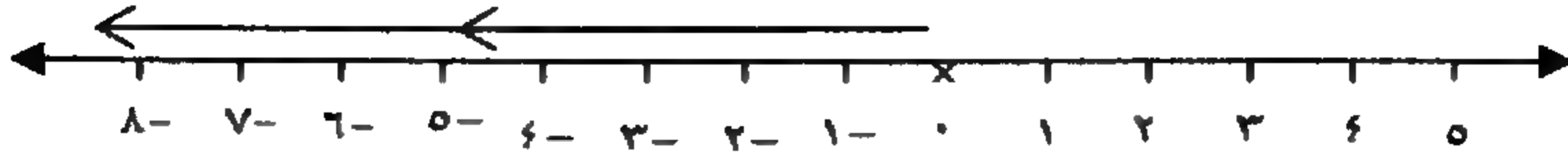
$$2 = 5 + (3 -)$$



## المجموعات والأعداد



$$8 = (0 -) + (3 -) \times$$



ابدأ من الصفر وتحرك يساراً بمقدار 3 وحدات لتصل الى العدد - 3 ثم  
تحرك يساراً أيضاً بمقدار 5 وحدات لتصل الى العدد - 8

$$-8 = (0 -) + (3 -)$$

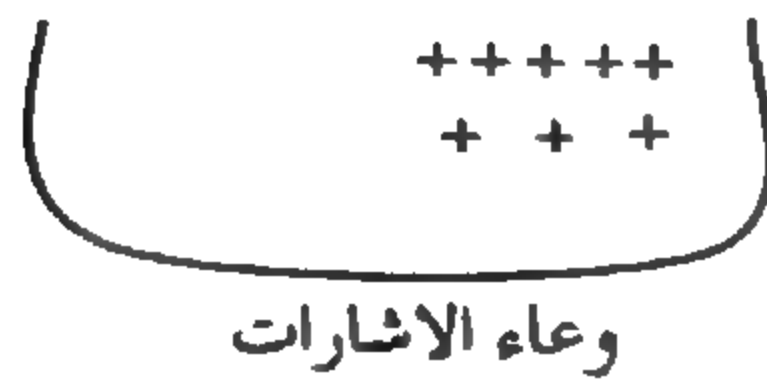
$$8 = (0 -) + 3 \times$$



ابدأ من الصفر وتحرك يميناً بمقدار 3 وحدات لتصل الى العدد 3 ثم تحرك  
يساراً بمقدار 5 وحدات لتصل الى العدد - 2

$$-2 = (0 -) + 3 -$$

وهناك طريقة أخرى لايجاد نواتج الجمع السابقة باستخدام وعاء الإشارات  
Sings container، يعتبر هذا الوعاء وسيلة تعليمية تفيد في اجراء عملية جمع الأعداد  
الصحيحة الموجبة والسالبة كما يلي:



$$8 = 0 + 3 \times$$

نستعيز عن الاعداد باشاراتها،

فالعدد 3 مكون من 3 اشارات موجبة

والعدد 5 مكون من 5 اشارات موجبة

وبعد (التعادل) أو التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة يبقى في الاناء 8 اشارات  
موجبة.

$$8 = 0 + 3 \times$$



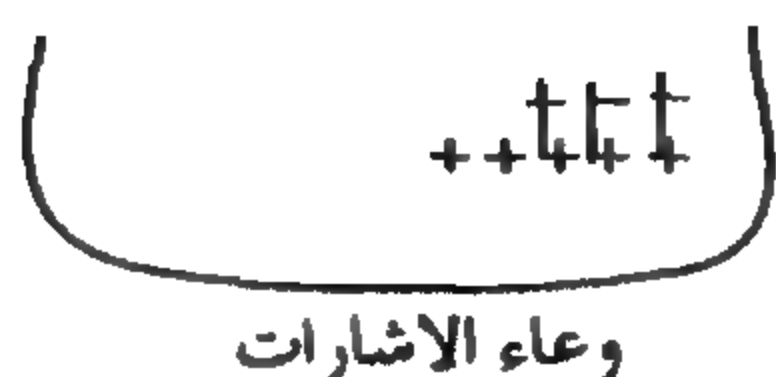
## المجموعات والأعداد



$$55 = 0 + (3 -) \times$$

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة فيبقى في

الاناء ٢ اشارة موجبة

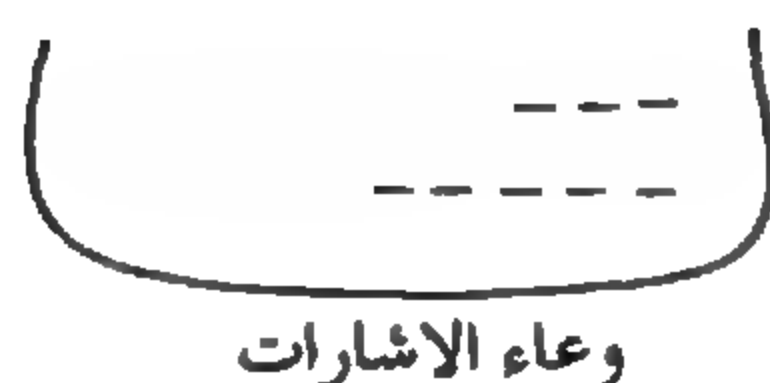


$$2 = 0 + (3 -) \text{ أي أن: } 2 = 0 + (3 -)$$

$$55 = (0 -) + (3 -) \times$$

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة فيبقى في

الاناء ٨ اشارة سالبة

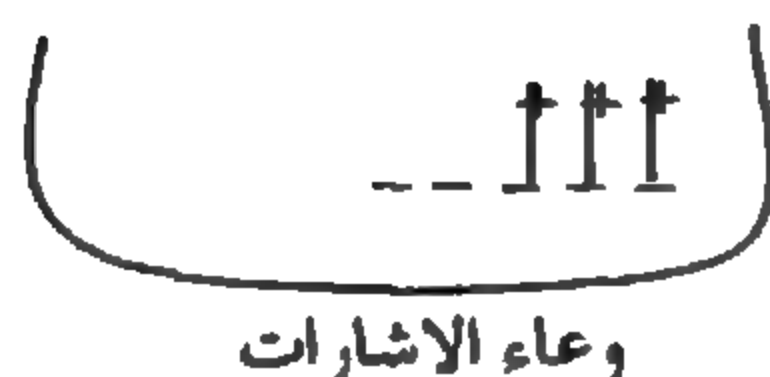


$$8 - = (0 -) + (3 -) \text{ أي أن: } 8 - = (0 -) + (3 -)$$

$$55 = (0 -) + 3 \times$$

وبعد (التعادل) التزاوج بين الاشارات السالبة والموجبة يبقى في

الاناء اشارتين سالبتين



$$2 - = (0 -) + 3 \text{ أي أن: } 2 - = (0 -) + 3$$

وهكذا....

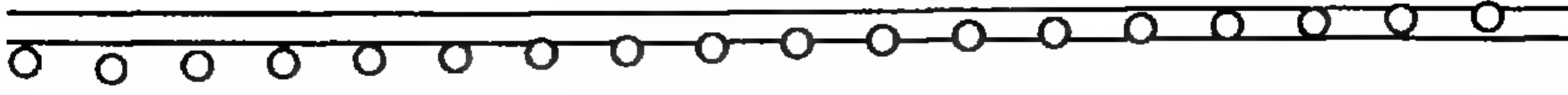
والطريقتان المذكورتان أعلاه لجمع الأعداد الصحيحة تستخدمان عندما تكون قيم الأعداد المراد جمعها الموجبة أقل من ١٠ مثلاً ليكون عدد الاشارات قليلاً والسالبة أكبر من - ١٠ مثلاً ليكون عدد الاشارات قليلاً أيضاً.

أما اذا زادت قيم الاعداد الموجبة عن ١٠ أو قلت قيم الأعداد السالبة عن - ١٠ فإننا تتبع الطريقة التالية والمكونة من شقين:





### المجموعات والأعداد



الشق الأول: لجمع عددين صحيحين متشابهين بالإشارة جد المجموع للقيمتين المطلقتين لهما واعط الناتج نفس الإشارة كما يلي:

$$60 - = (40 -) + (20 -)$$

$$60 = 40 + 20$$

الشق الثاني: لجمع عددين صحيحين مختلفين بالإشارة جد الفرق بين القيمتين المطلقتين لهما وأعط الناتج إشارة العدد الذي قيمته المطلقة أكبر كما يلي:

$$30 = (50) + (20 -)$$

$$30 - = (50 -) + (20)$$





## أمثلة محلولة

أوجد ناتج:

$$12 = (8 -) + 12, \quad 0 = (13 -) + 8, \quad 39 = (25 -) + (14 -)$$

$$10 = 10 + \text{صفر}, \quad 189 = (161 -) + 250, \quad 8 = (6 -) + (2 -)$$

$$231 = |231 -| = |132 - 99 -|, \quad 33 = |33| = |132 + 99 -|$$

$$6 = (7 -) + 13 = (7 -) + (24 + 11 -) = (7 -) + 24 + 11 -$$

طرح الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة:

تعتبر عملية الطرح في الرياضيات ( - ) عملية عكسية لعملية الجمع ( + ) والعكس صواب.

عملية الطرح في حلقة الأعداد الصحيحة ولأي عددين صحيحين أ ، ب تكون على الصورة  $A - B = A + (-B)$  النظير الجمعي ( المعكوس ) للعدد ب

$$A + (-B) =$$

وتصبح عملية جمع بعد تغيير إشارة العدد الثاني.

$$\text{وعليه } 12 - 9 = 12 + (-9) = 3$$

$$\text{وكذلك } 10 - 8 = 10 + (-8) = 2$$

$$\text{ثم كذلك } 8 - 8 = 8 + (-8) = 0$$

مثال:

إذا كانت أعلى درجة حرارة مسجلة في مدينة عجلون ٢٦° س في يوم من صيف أحد الأعوام، وأدنى درجة حرارة مسجلة في يوم من شتاء نفس العام -٥° س أوجد الفرق بين أعلى وأدنى درجتي حرارة عجلون في ذلك العام.



## المجموعات والأعداد



الفرق = أعلى درجة حرارة - أدنى درجة حرارة

$$= (-5) - 36$$

$$= 36 + 5 = 41 \text{ °س} \text{ ويسمى هذا الفرق المدى الحراري لذلك العام.}$$

كما يسمى العدد الأول (+36) المطروح منه والعدد - 5 المطروح والعدد 41

بأقي الطرح.

ومن الأمثلة:

$$-6 - 10 = (-10) + 6 = 10 - 6, \quad -9 - (-13) = 13 + 9 = 22$$

وهكذا..



### ضرب الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، ٠) Integer Ring

إذا علمت أن درجة الحرارة تنخفض بمعدل ٧ درجات سيلسيوسية كلما ارتفعنا في الغلاف الجوي حول الأرض بمعدل ١ كم تقريباً ومن نقطة في الغلاف الجوي درجة الحرارة فيها صفر سيلسيوس ارتفع مسافة ٢ كم، فما درجة الحرارة عند النقطة التي وصلها؟ بما أن درجة الحرارة تنخفض ٧ درجات سيلسيوسية لكل كيلومتر واحد فإن درجة الحرارة تصبح:

$$(-7) + (-7) + (-7) = \text{مكررة بالجمع ثلاث مرات}$$

وبما أن الضرب هو جمع مكرر فإن:

$$(-7) + (-7) + (-7) = (-7)(3) = -21$$

وكان حاصل ضرب عدد مختلفين بالإشارة هو عدد سالب

والآن اليك جدول الاشارات في الضرب دون جدالٍ أو نقاش:

$$\begin{cases} \text{عند ضرب عددين متشابهين بالإشارة فإشارة الجواب (+)} \\ \begin{cases} 1+ = (1+)(1+) \\ 1+ = (1-)(1-) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{عند ضرب عددين مختلفين بالإشارة فإشارة الجواب (-)} \\ \begin{cases} (1-)(1+) = (1-)(1+) \\ (1-)(1-) = (1+)(1-) \end{cases} \end{cases}$$

مثال:

$$(5)(6) = 30$$

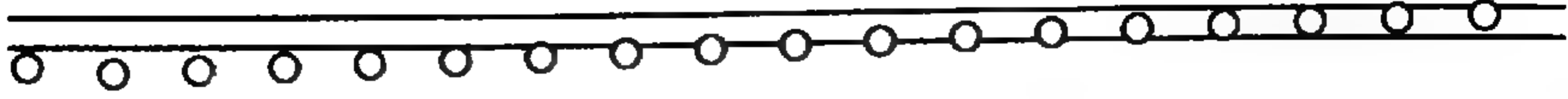
$$(-5)(-6) = 30$$

$$(-5)(6) = -30$$

$$(5)(-6) = -30$$

هذا ويسمى العدد الأول ٥ المضروب والعدد الثاني (-6) المضروب فيه والعدد (-30) حاصل الضرب.





### أمثلة محلولة:

أوجد حاصل ضرب:

$$(11)(-4) = (-4)(11), \quad (-62)(-5) = (-5)(-62), \quad (-13)(6) = (6)(-13)$$

$$78 - =$$

قسمة الأعداد الصحيحة في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، ٠):

عندما يكون ذلك ممكناً:

تعتبر عملية القسمة ( $\div$ ) في الرياضيات عملية عكسية لعملية الضرب ( $\times$ ) والعكس صواب.

وأما من حيث قوانين الاشارات فالعمليتان متطابقتان تماماً أي أن ناتج قسمة عددين صحيحين متشابهين بالاشارة يكون موجباً:

$$1+ = (1+) \div (1+)$$

$$1+ = (1-) \div (1-)$$

$$\text{مثل: } 2 = 12 \div 6, \quad 2 = (-12) \div (-6)$$

وناتج قسمة عددين صحيحين مختلفين بالاشارة يكون سالب:

$$1- = (1+) \div (1-)$$

$$1- = (1-) \div (1+)$$

$$\text{مثل: } 2- = 6 \div (-12), \quad 2- = (-6) \div 12$$

والقسمة في حلقة الأعداد الصحيحة غير جائزة إلا اذا كان خارج القسمة عدداً صحيحاً.

$$\text{مثل: } 5 \div 20 = \frac{1}{4} \quad \text{لكن } 7 \div 20 \text{ غير جائزة في الحلقة (ص، +، ٠)}$$



## المجموعات والأعداد



مثال:

$$7 = (6 -) \div (42 -) , 7 - = (6) \div (42 -) , 7 = 6 \div 42$$

$$7 - = (6 -) \div 42$$

هذا ويسمى العدد الأول (42) المقسوم والثاني (6 -) المقسوم عليه والعدد 7 - خارج القسمة.

هناك بعض المفاهيم نود مناقشتها في حلقة الأعداد الصحيحة بالرموز والأمثلة فقط:

× العامل Divisor أو القاسم:

يكون العدد الصحيح ب عاملاً أو قاسماً للعدد الصحيح أ إذا وفقط إذا كان:

$$أ = ب × ك \text{ حيث } ك \in \mathbb{Z}$$

وعندها يقال أن العدد أ من مضاعفات العدد ب

مثال:

العدد الصحيح 3 عامل للعدد الصحيح 24 لأن 24 = العدد 3 × 8 عندها يكون العدد 24 من مضاعفات العدد 3 وهكذا..

ومن هنا ينتج أن عوامل العدد أ ≠ صفر أو قواسمه في حلقة الأعداد الصحيحة كما يلي:

قواسم العدد أ أو عوامله هي ، أ - ، أ ، 1 - ، 1 على الأقل

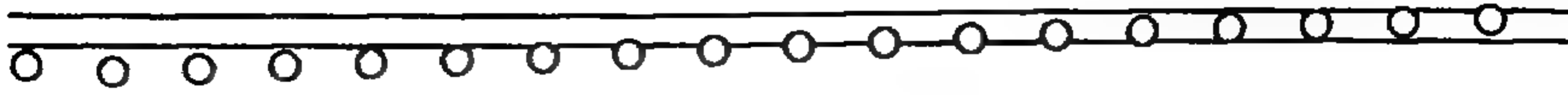
مثال:

عوامل العدد 5 هي: 5 - ، 5 ، 1 - ، 1 فقط

وعوامل العدد 8 هي: 8 - ، 8 ، 4 - ، 4 ، 2 - ، 2 ، 1 - ، 1 وهكذا







× العدد الأولي Prime Number:

يسمى العدد الصحيح ج عدداً أولياً اذا وفقط اذا كان للعدد ج أربعة عوامل فقط هي ج ، - ج ، ١ ، - ١

فالعدد ٧ عدد أولي كون عوامله ٧ ، - ٧ ، ١ ، - ١

والعدد ٩ ليس أولياً كون عوامله أكثر من أربعة ٩ ، - ٩ ، ١ ، - ١ ، ٣ ، - ٣

ولتبسيط المفهوم: العدد الأولي هو العدد الذي ليس له عوامل إلا نفسه والواحد الصحيح فقط دون اعتبار الاشارة.

وكما يقال: العدد الأولي لا يقبل القسمة إلا على نفسه (القسمة بدون باق)

والأعداد الأولية مجموعة غير منتهية تسمى أ.

حيث  $A = \{ \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \dots \}$

ويمكن أن نكتفي الآن بالأعداد الأولية الموجبة فقط للسهولة فقط،

وهي  $A = \{ 2, 3, 5, 7, \dots \}$

ويلاحظ أن جميع عناصر هذه المجموعة (جميع الأعداد) أعداد صحيحة

فردية ما عدا العدد ٢ فهو كما يعلم الجميع عدد صحيحاً زوجياً، وبما أن العدد ٢

عامل من عوامل العدد ١٠ كون عوامل العدد ١٠ وهي:

١٠ ، - ١٠ ، ٥ ، - ٥ ، ٢ ، - ٢ ، ١ ، - ١

فإن العدد ٢ أصغر من أو يساوي العدد ١٠

وكذلك - ٢ أصغر من أو يساوي العدد ١٠

وهكذا لبقية العوامل

## المجموعات والأعداد



وبشكل عام، إذا كان العدد ب من عوامل العدد د فإن:

ب أصغر من أو يساوي د

وبالرموز  $b \leq d$

مع ملاحظة أن العدد ١ ليس أولياً كون عدد عوامله ليست أربعة كما مرّ

سابقاً. بل اثنين فقط هما - ١، ١

× تحليل الأعداد في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، -) الى عواملها الأولية وكتابة الناتج بصورة أسية:

مع أننا سنركز على تحليل الأعداد الصحيحة الموجبة لا لئنها وسهولتها فإننا لن نفعل تحليل الأعداد الصحيحة السالبة في المستقبل.

٢	١٦
٢	٨
٢	٤
٢	٢
	١

نبدأ بالعدد ١٦ فنقول:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ أي أن } 16$$

← ٤ = يسمى الأس  
← ٢ = يسمى الأساس

مثال:

حلل العدد ٨١ الى عوامله وضع الجواب بصورة أسية:

٣	٨١
٣	٢٧
٣	٩
٣	٣
	١

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$3^4 =$$

مثال:

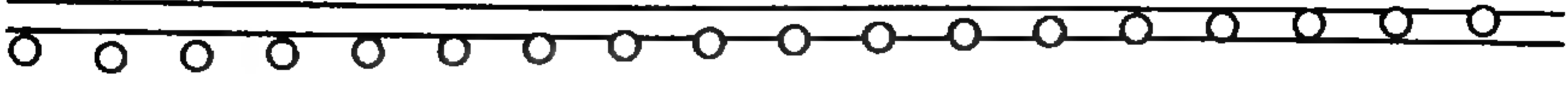
حلل العدد ٥٤ الى عوامله الأولية:

٢	٥٤
٣	٢٧
٣	٩
٣	٣
	١

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$$

$$2^1 \times 3^3 =$$





والمختصر المفيد لعملية التحليل المبسطة هذه هو الاستمرار بعملية التحليل حتى نحصل على العدد "١" في نهاية عملية القسمة كما في الأمثلة السابقة أعلاه.

مثال:

اكتب ما يلي على شكل قوى أو أسس:

$${}^4 5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5$$

$${}^2 3 \times {}^2 7 = 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7$$

$${}^4 (7 -) = (7 -) (7 -) (7 -) (7 -)$$

مثال:

اكتب ما يلي على شكل حاصل ضرب:

$$729 = {}^1 3 = (3 \times 3) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) = {}^2 3 \times {}^4 3$$

$$675 = (27) (25) = (3 \times 3 \times 3) (5 \times 5) = {}^2 3 \times {}^2 5$$

وبشكل عام يمكن أن يقال أن:

$s^n = s \times s \times s \times \dots \times s$  الى ن مرة وتسمى الصورة الأسية للأساس س حيث س يسمى الأساس ، ن يسمى الأس.

لذا فإن  $s^2 = s \times s$  وهكذا

وكذلك  $s^2 \times s^2 = (s \times s) (s \times s) = s^4$  (عند الضرب تجمع الأسس)

وكذلك  $\frac{s^4}{s^2} = \frac{s \times s \times s \times s}{s \times s} = s^2$  (عند القسمة تطرح الأسس)

ثم كذلك  $(s^2)^2 = (s \times s) (s \times s) = s^4$  (عند الرفع تضرب الأسس)

## المجموعات والأعداد



وبناءً عليه:

$$7 \times 2 = 4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2$$

$$2 \times 2 = 2^{-5} \times 2 = 2 \times 2 \div 5 \times 2$$

$$18 \times 2 = 6 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2$$

نستطيع الآن اجراء عملية التحليل الى العوامل لأعداد صحيحة سالبة أيضاً.

مثال:

حل - ٦٤ الى عواملها الأولية كعوامل سالبة

٢-	٦٤-
٢-	٣٢
٢-	١٦-
٢-	٨
٢-	٤-
٢-	٢
١-	١-
	١

المهم أن ينتج العدد "١" كميةً وإشارةً

في نهاية عملية التحليل

لذا فان:

$$- 64 = (-2)^6 \times (-1)$$

مثال:

وكذلك حل - ٢٧ الى عوامله الأولية السالبة

٣-	٢٧-
٣-	٩
٣-	٣-
	١

$$- 27 = (-3)^3$$

وهكذا...

× القاسم المشترك الأكبر (H.C.F) (Highest Common Factor):

سنجد القاسم للأعداد الصحيحة الموجبة فقط.

واختصاراً يكتب هكذا: ق . م . أ



## المجموعات والأعداد



لايجاد سنسير بطريقتين:

الأولى: طريقة القواسم أو العوامل.

لايجاد ق. م. أ. للعددين ٢٠ ، ٣٠

نجد قواسم العدد ٢٠ الموجبة وهي ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ١٠

وقواسم العدد ٣٠ الموجبة وهي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ١٠

ونأخذ أكبر هذه القواسم كونه القاسم المشترك (الأكبر)

وأكبرها هو العدد ١٠

$$\therefore \text{ق. م. أ.} = ١٠$$

هذه الطريقة مطولة لذا نلجأ الى الطريقة الثانية المختصرة:

الطريقة الثانية:

لايجاد ق. م. أ. لعددين أو أكثر نحل كلاً منها الى عوامله الأولية هكذا:

٢	٣٠
٣	١٥
٥	٥
	١

٢	٢٠
٢	١٠
٥	٥
	١

$$\begin{aligned} ٢٠ &= ٢ \times ٢ \times ٥ \\ ٣٠ &= ٢ \times ٣ \times ٥ \end{aligned}$$

نأخذ العوامل المشتركة وتضرب في بعضها كما يلي:

$$\text{ق. م. أ.} = ٢ \times ٥ = ١٠$$

مثال:

٢	٩٠	٣٠
٣	٤٥	١٥
٥	١٥	٥
	٣	١

أوجد ق. م. أ. للعددين ٩٠ ، ٣٠

يمكن تحليل العددين معاً هكذا

$$\text{ق. م. أ.} = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$$

نتوقف حيث التحليل للعددين معاً.



## المجموعات والأعداد



مثال:

أوجد ق.م.أ. للعددين ١٥ ، ٢٤

١	٢٤	١٥
	٢٤	١٥

ق.م.أ. = ١ فقط

حيث لا يوجد عوامل أخرى مشتركة.

مثال:

أوجد ق.م.أ. لكل من مجموعات الأعداد التالية:

(i) ٢ ، ٢ ، ٢ × ٢

الحل:

$$٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^٣$$

$$٢ \times ٢ = ٢ + ٢$$

ق.م.أ. = ٢

٢	٨٤	٢٤
٢	٤٢	١٢
٣	٢١	٦
	٧	٢

نتوقف

(٢٤ ، ii) ، ٨٤

$$١٢ = ٣ \times ٢ \times ٢ = ٢ \times ٢ \times ٣ = ٢^٢ \times ٣$$

(٢٥ ، iii) ، ٤٥ ، ٦٣

١	٦٣	٤٥	٢٥
	٦٣	٤٥	٢٥

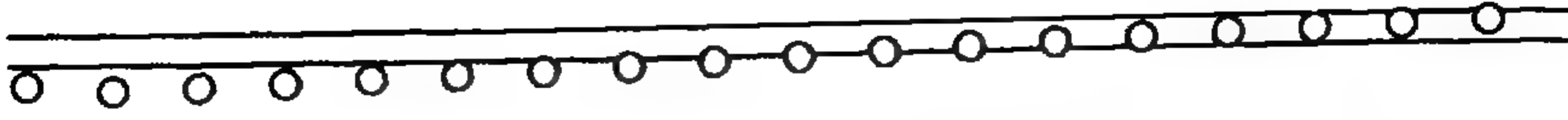
ق.م.أ. = ١

حيث لا يوجد عوامل مشتركة أخرى.





## المجموعات والأعداد



× المضاعف المشترك الأصغر Lowest Common multiple:

للأعداد الصحيحة الموجبة فقط: ويرمز له بالرمز م.م.أ.

والطريقة باختصار شديد: نحلل الأعداد ونرتب عواملها ثم نأخذ العوامل المشتركة وغير المشتركة ونضربها في بعضها البعض هكذا:

مثال:

أوجد م.م.أ. للأعداد ٢٤ ، ٣٦

٢	٣٦
٢	١٨
٣	٩
٣	٣
	١

٢	٢٤
٢	١٢
٢	٦
٣	٢
	١

$$٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢٤$$

$$٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢ = ٣٦$$

$$٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = \text{م.م.أ.}$$

$$٧٢ = ٩ \times ٨ =$$

مثال:

أوجد م.م.أ. للعددين ٢٨ ، ٤٩

نحلل العددين معاً هكذا:

٧	٤٩	٢٨
	٧	٤

ثم نضرب العوامل المشتركة على اليسار في خارج القسمة

$$٤ \times ٧ \times ٧ = \text{م.م.أ.}$$

$$١٩٦ = \text{حاصل ضرب العوامل المشتركة} \times \text{غير المشتركة}$$

مثال:

أوجد ق.م.أ. للعددين ٤٨ ، ٣٦

نحلل ونضع الجواب بصورة أسية لكل من العددين:



## المجموعات والأعداد



$$٤٨ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٣ = ٢^٤ \times ٣^١ \text{ بصورة أسية}$$

$$٣٦ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣ = ٢^٢ \times ٣^٢ \text{ بصورة أسية}$$

والآن يمكن أن نجد:

$$\text{م. م. أ} = \text{حاصل ضرب العوامل جميعها بأكبر أس:}$$

هكذا:

$$\text{م. م. أ} = ٢^٤ \times ٣^٢ = (١٦)(٩) = ١٤٤$$

ويمكن أن نجد ق. م. أ "حاصل ضرب العوامل المشتركة بأصغر أس":

هكذا:

$$\text{ق. م. أ} = ٢^٢ \times ٣^١ = (٤)(٣) = ١٢$$

مثال:

أجر العمليات التالية:

$$(-٨) + (٤)$$

$$(-٨) - (٤)$$

$$(-٨)(٤)$$

$$\frac{(-٨)}{٤}$$

٤

الحل:

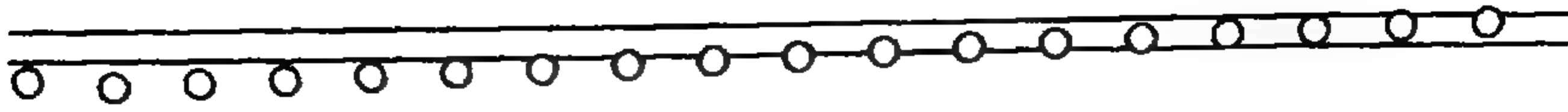
$$\begin{array}{|c|} \hline \text{-----} \text{|||||} \\ \hline \end{array} \quad ٤ - = (-٨) + (٤)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{-----} \text{|||||} \\ \hline \end{array} \quad ١٢ - = (-٤) + (-٨)$$

$$٣٢ - = (-٨)(٤)$$

$$٢ - = \frac{(-٨)}{٤}$$





## (١- ١٦) الحقول Field:

الحقل نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مثل (ج ، هـ ، \* )، وحتى يتشكل الحقل من هذا النظام الرياضي يجب أن يتحقق في النظام المذكور الشروط التالية معاً:

(i) (ج ، هـ) زمرة تبديلية

(ii) (ج\* ، \*) زمرة تبديلية

(iii) ثم تتوزع العملية \* على العملية هـ هكذا:

$$أ * (ب هـ ج) = (أ * ب) هـ (أ * ج) \text{ لكل } أ ، ب ، ج \in ج$$

ومن أشهر الحقول في الرياضيات:

حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠) حيث ك مجموعة الأعداد النسبية

وحقل الأعداد الحقيقية (ح ، + ، ٠) حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية

ثم حقل الأعداد المركبة (ع ، + ، ٠) حيث ع مجموعة الأعداد المركبة

والعدد المركب  $أ + ب ت$  حيث  $أ ، ب \in ح$  حيث  $ت^2 = -١$

٠ سينا قش فيما بعد"

× حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠): Rational Field

وحقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠) ثلاثي مرتب،

مستقطه الأول مجموعة الأعداد النسبية ك =  $\left\{ \frac{أ}{ب} ، أ \in ص ، ب \in ص ، ب \neq ٠ \right\}$

ومستقطه الثاني عملية الجمع العادية (+)

ومستقطه الثالث عملية الضرب العادية (٠)

والعدد النسبي  $\frac{أ}{ب}$  ليس هو الزوج المرتب (أ ، ب) فقط كما أنه ليس خارج قسمة

## المجموعات والأعداد

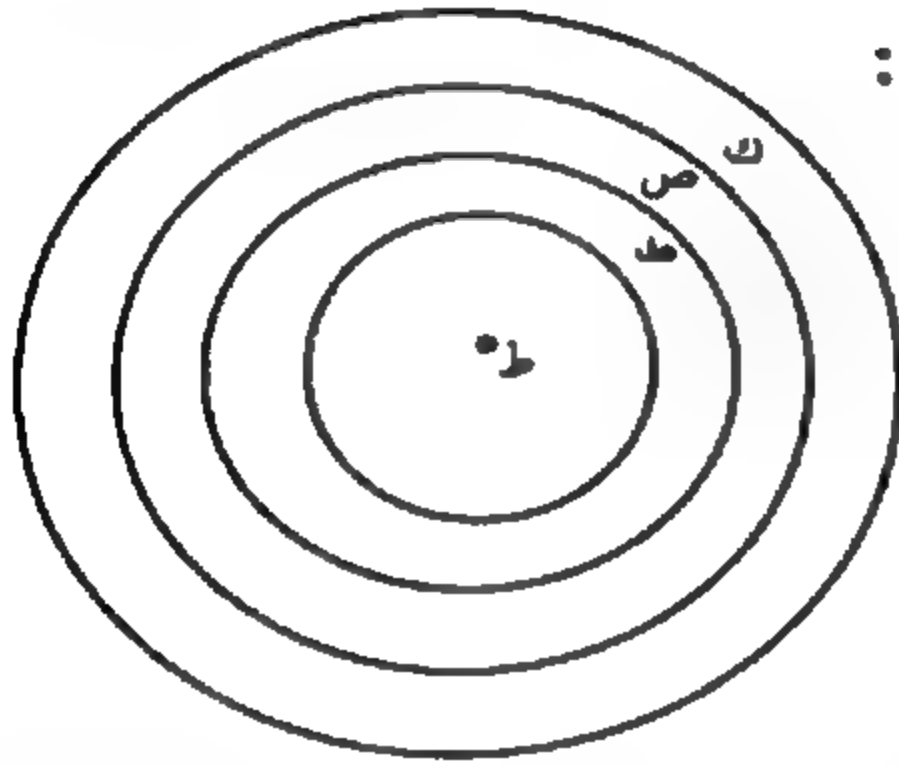


العدد الصحيح أ على العدد الصحيح ب فقط أي ليس هو الكسر العادي Fraction ،  
وانما هو صف من صفوف التكافؤ التي يمثلها العدد النسبي  $\frac{أ}{ب}$  بأبسط صورة  
ممكنة ، لذا يرتبط العدد النسبي بالكسر العادي ومضاعفاته حيث:

$$\dots = \frac{(٥-) \times ١}{(٥-) \times ٢} = \frac{(٤-) \times ١}{(٤-) \times ٢} = \frac{٣ \times ١}{٣ \times ٢} = \frac{٢ \times ١}{٢ \times ٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{أي } \frac{٥-}{١٠-} = \frac{٤-}{٨-} = \frac{٣}{٦} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ وهكذا}$$

والجدير بالذكر أن كل عدد طبيعي أو كلي أو صحيح هو عدد نسبي  
والعكس ليس صواباً كما هو موضح في الشكل:



كون ط\*  $\supset$  ط  $\supset$  ص  $\supset$  ك

أي أن العدد الطبيعي  $\frac{٤}{١} = ٤$  أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الطبيعية ط\*

والعدد الكلي صفر  $= \frac{\text{صفر}}{١}$  أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الكلية ط

والعدد الصحيح  $(-٥) = \frac{٥-}{١}$  أصبح نسبياً وهكذا جميع الأعداد الصحيحة ص

ومجموعة الأعداد النسبية ك =  $\{٠\} \cup ك^* \cup ك^*$  مع ملاحظة أن يكون العدد  
النسبي  $\frac{أ}{ب}$  موجباً عندما تكون للعددين الصحيحين أ ، ب الإشارة نفسها مثل:

$$\frac{٥+}{٩+} \text{ أو } \frac{٤-}{٥-} \text{ حيث } (٥+) (٩+) < \text{ صفر وكذلك}$$

$$(-٤) (-٥) < \text{ صفر}$$

ويكون العدد النسبي  $\frac{أ}{ب}$  سالباً عندما تكون للعددين الصحيحين أ ، ب

اشارتان مختلفتان مثل  $\frac{٥+}{٩-}$  أو  $\frac{٤-}{٥+}$  حيث  $(٥+) (-٩) > \text{ صفر وكذلك } (-٤) (-٥) > \text{ صفر.}$

ثم يكون العدد النسبي  $\frac{أ}{ب} = \text{ صفر عندما يكون } أ = \text{ صفر دون ب}$

أي أن: ب  $\neq$  صفر دائماً وان أ = صفر فقط





مثال:

$$\frac{0}{3} = \frac{0}{-3} \text{ كون (صفر) } (0) = (\text{صفر}) (-) (3) = \text{صفر}$$

وبناء على ما سبق فإن:

العدد النسبي  $\frac{2}{0}$  سالباً

والعدد النسبي  $\frac{2}{-0}$  سالباً

وبفضل كتابته على الشكل  $-\frac{2}{0}$

$$\text{وعليه: } \frac{2}{-0} = -\frac{2}{0} = \frac{2}{0}$$

والعدد النسبي  $\frac{3}{0}$  موجب والعدد  $\frac{3}{-0}$  موجب

$$\text{لذا } \frac{3}{-0} = -\frac{3}{0} \text{ كون } (3) (0) = (-) (3) (-) (0) \text{ كما أسلفنا.}$$

\* تبسيط العدد النسبي  $\frac{أ}{ب}$  ، أي ظهور  $\frac{أ}{ب}$  بأبسط صورة ممكنة

$$\text{إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \leftarrow \text{فإن } (أ) (د) = (ب) (ج)$$

كون  $\frac{أ}{ب}$  ،  $\frac{ج}{د}$  ينتميان الى نفس صف التكافؤ الذي يمثله  $\frac{أ}{ب}$  بأبسط صورة

$$\text{أي أن } \frac{1}{4} = \frac{5}{20} \text{ لأن } (1) (20) = (4) (5)$$

ومن هنا لتبسيط العدد النسبي  $\frac{5}{10}$  نقسم العدد 5 (يسمى أحياناً بسط الكسر العادي)

والعدد 10 (يسمى أحياناً مقام الكسر العادي) على ق. م. أ للعددين 5 ، 10 وهو العدد "5"

$$\text{هكذا: } \frac{1}{2} = \frac{5 \div 5}{5 \div 10} = \frac{5}{10}$$

والعملية تتم بإيجاز شديد هكذا:

## المجموعات والأعداد



$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{وكذلك} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{كونه عدداً سالباً.}$$

ومن هنا وبشكل عام فإن  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$  والصورة الأخيرة

$\frac{a}{b}$  هي الأفضل وأبسط صورة للعدد النسبي  $\frac{a}{b}$  كونه عدداً موجباً.

هذا ولكل عدد نسبي  $\frac{a}{b}$ ،  $a$ ،  $b \neq 0$  صفري يوجد عدد نسبي آخر هو  $\frac{b}{a}$

يسمى مقلوب العدد النسبي  $\frac{a}{b}$  أو نظيره الضربي. كون  $1 = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$

الواحد الصحيح العنصر المحايد لعملية الضرب (٠)

فمقلوب العدد  $\frac{7}{3}$  هو  $\frac{3}{7}$  ومقلوب العدد  $\frac{7}{3}$  هو  $\frac{3}{7}$

ومقلوب العدد ٥ هو  $\frac{1}{5}$  ومقلوب العدد  $\frac{1}{8}$  هو ٨ وهكذا

مثال:

اكتب كلاً من الأعداد التالية على الصورة  $\frac{a}{b}$ ،  $a$ ،  $b \neq 0$  صفري هو

واكتب مقلوبة أيضاً.

مثال:

$$\text{العدد} \quad \frac{1}{7} = \frac{1}{7} = \frac{1 + (7 \times 2)}{7} = \frac{15}{7} \quad \text{ومقلوبه} \quad \frac{7}{15}$$

$$\text{العدد} \quad 1.4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \quad \text{ومقلوبه} \quad \frac{5}{7}$$

$$\text{العدد} \quad 0.044 = \frac{44}{1000} = \frac{11}{250} \quad \text{ومقلوبه} \quad \frac{250}{11}$$





وكما تم تمثيل الأعداد الصحيحة على خط الأعداد يمكن تمثيل الأعداد النسبية على نفس الخط يجعل الأعداد النسبية الموجبة على يمين الصفر والأعداد النسبية السالبة على يساره

مثال:

مثل الأعداد النسبية التالية  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{8}{3}$  ،  $\frac{8}{3}$  على خط الأعداد لتمثل العدد  $\frac{2}{3}$  على خط الأعداد نقول  $2 > 3$  أي أن  $\frac{2}{3} > 1$  لذلك فإن  $\frac{2}{3}$  يقع بين 0 ، 1 عندها تقسم المسافة من صفر إلى 1 إلى 3 أقسام ونافذ منها قسمين وتعين العدد  $\frac{2}{3}$  هكذا:



ولتمثيل العدد  $\frac{2}{3}$  فالعدد  $2 > 3$  وكون العدد  $\frac{2}{3}$  سالب فإنه أكبر من - 1 ويقع بين العددين - 1 ، صفر وتقسم المسافة من - 1 إلى صفر إلى ثلاثة أقسام ونأخذ قسمين وتعين العدد  $\frac{2}{3}$  هكذا

أما لتمثيل العدد  $\frac{8}{3}$  فإننا نحوله إلى عدد كسري أي عدد صحيح وكسر حقيقي (بسطه أصغر من مقامه) بقسمة  $8 \div 3 = 2 \frac{2}{3}$  فالعدد يقع بين 2 ، 3 وبنفس الطريقة السابقة.

وكذلك  $\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$  فالعدد يقع بين - 3 ، - 2 وبنفس الطريقة السابقة هذا ويسمى بعد العدد عن الصفر بالقيمة المطلقة للعدد (كما مرّ سابقاً في حلقة الأعداد الصحيحة).

$$\frac{2}{3} = \left| \frac{2}{3} - \right| = \left| \frac{2}{3} \right|$$

$$\frac{8}{3} = \left| \frac{8}{3} - \right| = \left| \frac{8}{3} \right|$$

## المجموعات والأعداد



لذلك يسمى العدد -  $\frac{2}{3}$  معكوس جمعي للعدد  $\frac{2}{3}$  والعكس صواب

وكذلك يسمى العدد -  $\frac{8}{3}$  معكوس جمعي للعدد  $\frac{8}{3}$  والعكس صواب

والواضح من التمثيل على خط الاعداد أن العدد الواقع على اليمين أكبر من العدد الواقع على اليسار كما في تمثيل الأعداد السابقة.

أي أن -  $\frac{2}{3}$  أصغر من  $\frac{2}{3}$

وبالرموز -  $\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$  والعكس  $\frac{2}{3} > \frac{2}{3}$  <sup>أصغر من</sup> <sup>أكبر من</sup>

وكذلك -  $\frac{8}{3} < \frac{8}{3}$  والعكس  $\frac{8}{3} > \frac{8}{3}$

ولذلك فعند مقارنة الأعداد النسبية فإننا نوجد مقاماتها ونقارن بين بسوطها باعتبار الأعداد النسبية كسور عادية.

وللمقارنة بين العددين  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{5}{8}$  نقول

(نوجد المقامات كون الأعداد النسبية ككسور عادية)  $\frac{8 \times 2}{8 \times 3}$  ،  $\frac{3 \times 5}{3 \times 8}$

$$\frac{16}{24} ، \frac{15}{24}$$

كون  $16 > 15$  <sup>فإن</sup>  $\frac{2}{3} < \frac{5}{8}$

وكذلك -  $\frac{5}{8}$  ، -  $\frac{2}{3}$  نقول

$$\frac{8 \times 2}{8 \times 3} - ، \frac{3 \times 5}{3 \times 8} -$$

$$\frac{16 -}{24} ، \frac{15 -}{24}$$

كون -  $15 < 16$  <sup>فإن</sup>  $\frac{16 -}{24} < \frac{15 -}{24}$

من هنا ينشأ الترتيب التنازلي والتصاعدي للأعداد النسبية.

مثال:

رتب الأعداد النسبية التالية  $\frac{5}{9}$  ،  $\frac{6}{10}$  ،  $\frac{8}{15}$  ترتيباً تصاعدياً ثم ترتيباً تنازلياً.



## المجموعات والأعداد



نبدأ بتوحيد المقامات حيث المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ٩ ، ١٠ ، ١٥ هو ٩٠ هكذا:

$$\frac{6 \times 8}{6 \times 15} , \frac{9 \times 6}{9 \times 10} , \frac{10}{10} \times \frac{9}{9} = \frac{48}{90} , \frac{54}{90} , \frac{90}{90} =$$

$$\frac{54}{90} , \frac{90}{90} , \frac{48}{90} \text{ والترتيب التصاعدي لها هو } \frac{48}{90} , \frac{90}{90} , \frac{54}{90} \text{ أي } \frac{8}{15} , \frac{10}{10} , \frac{6}{10}$$

وأما الترتيب التنازلي بعد اجراء العمليات السابقة فهو:

$$\frac{8}{15} , \frac{10}{10} , \frac{6}{10}$$

مثال:

رتب الأعداد التالية  $\frac{8}{7}$  ،  $\frac{2}{7}$  ،  $\frac{9}{7}$  ،  $\frac{1}{7}$  ،  $\frac{1}{7}$  تنازلياً

نبدأ بتوحيد المقامات حيث المضاعف المشترك الأصغر للمقامات هو ٧

$$\frac{8}{7} , \frac{2}{7} , \frac{9}{7} , \frac{1}{7} , \frac{1}{7} \text{ أي } \frac{8}{7} , \frac{2}{7} , \frac{9}{7} , \frac{1}{7} , \frac{1}{7}$$

$$\text{والترتيب التنازلي: } \frac{8}{7} , \frac{9}{7} , \frac{2}{7} , \frac{1}{7} , \frac{1}{7}$$

$$\text{أي } \frac{8}{7} , \text{ صفر} , \frac{2}{7} , 1 , \frac{1}{7}$$

مثال محلول:

ضع واحدة من الاشارات ( $<$  ،  $>$  ،  $=$ ) بين كل عددين فيما يلي:

$$\frac{4}{5} > \frac{3}{5} \text{ بما أن } 4 > 3 \text{ فإن } \frac{4}{5} > \frac{3}{5}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{1}{2} \text{ بعد توحيد المقامات، } \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$$

$$\text{بما أن } 2 < 1$$

$$\text{فإن } 1 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

←  $\frac{0}{0} \times \frac{8}{0}, \frac{3}{3} \times \frac{8}{0}$  بعد توحيد المقامات  $\left\{ \frac{8}{3}, \frac{8}{0} \right\} \times$   
 $\frac{40}{10}, \frac{24}{10}$

فإن  $\frac{8}{3} > \frac{8}{5} \leftarrow \frac{40}{15} > \frac{24}{15}$

$$\frac{3}{4}, \frac{3}{4} \text{ بعد اعادة التعريف } \left\{ \left| \frac{3}{4} - \right|, \left| \frac{3}{4} \right| \right\} \times$$

وبما أن  $3 = 3$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \text{ فإن}$$

أي أن  $\left| \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{3}{4} \right|$

\* جمع الأعداد وطرحها في حقل الأعداد النسبية (ك ، + ، ٠)

إذا كان  $\frac{أ}{ب}$ ،  $\frac{ج}{د}$  أعداد نسبية

$$\frac{أ د + ب ج}{ب د} = \frac{(ب \times ج) + (أ \times د)}{ب \times د} = \frac{ج}{د} + \frac{أ}{ب} \text{ فإن}$$

وهذا يسمى الضرب التبادلى في البسط فقط.

$$\frac{12 + 8}{21} = \frac{(4 \times 3) + (4 \times 2)}{7 \times 3} = \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \text{ وعليه فإن}$$

$$\frac{2.}{21} =$$

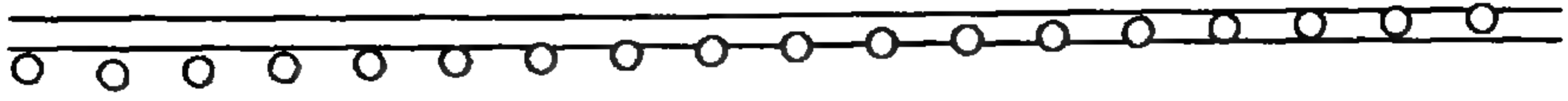
مع ملاحظة أن  $\frac{1}{b}$  ،  $\frac{1}{d}$  صفوف تكافؤ وليس اعداد فقط.

$$\frac{0 + 17-}{20} = \frac{(0 \times 1) + (17 \times 1-)}{2 \times 10} = \frac{1}{2} + \frac{17-}{10} \text{ وان}$$

$$\frac{11}{2} - = \frac{11-}{2} =$$

$$\frac{(0 \times 2) + (1 \times 3)}{1 \times 0} = \frac{2}{1} + \frac{3}{0} = 2 + \frac{3}{0} \text{ ثم ان}$$

$$\frac{12}{9} = \frac{1 + 2}{9} =$$



أما عملية الطرح في حقل الأعداد النسبية فإنها تُحول إلى عملية جمع هكذا:

بما أن لكل عدد نسبي  $\frac{أ}{ب}$  نظير جمعي أو معكوس في حقل الأعداد النسبية هو  $-\frac{أ}{ب}$  فإن العدد النسبي  $\frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د}$  عدد نسبي آخر  $\frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب} + \text{معكوس } \frac{ج}{د}$

$$\text{أي أن } \frac{أ}{ب} - \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} + \left(-\frac{ج}{د}\right) = \frac{أد + (-بج)}{ب \times د} = \frac{أد - بج}{ب \times د}$$

مثال:

$$\frac{١٤ - ١٥}{٣٥} = \frac{(٧ \times ٢) + (٥ \times ٣)}{٥ \times ٧} = \frac{٢}{٥} + \frac{٣}{٧} = \frac{٢}{٥} - \frac{٣}{٧}$$

$$\frac{١}{٣٥} =$$

أو الطرح مباشرة مثل:

$$\frac{١}{٣٥} = \frac{١٤ - ١٥}{٣٥} = \frac{(٧ \times ٢) - (٥ \times ٣)}{٥ \times ٧} = \frac{٢}{٥} - \frac{٣}{٧}$$

وكذلك:

$$\frac{٩١ -}{١٢} = \frac{٢٧ - ٦٤ -}{١٢} = \frac{(٩ \times ٣) - (٤ \times ١٦ -)}{٤ \times ٣} = \frac{٩}{٤} - \frac{١٦ -}{٣}$$

هذا ويمكن إجراء عملية الجمع والطرح بتوحيد المقامات كما يلي:

$$\frac{١٥}{٢١} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٣ \times ٥}{٣ \times ٧} + \frac{٧ \times ٢}{٧ \times ٣} = \frac{٥}{٧} + \frac{٢}{٣}$$

$$\frac{٢٩}{٢١} =$$

× ضرب الأعداد وقسمتها في حقل الأعداد النسبية (ك، +، ٠)

إذا كان  $\frac{أ}{ب}$  ،  $\frac{ج}{د}$  أعداد نسبية.

$$\text{فإن } \frac{أ \times ج}{ب \times د} = \frac{ج}{د} \times \frac{أ}{ب}$$

وهذا يسمى الضرب الأفقي (ضرب البسط × البسط والمقام × المقام).

## المجموعات والأعداد



مثال:

$$\frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{5 \times 2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{10}{21} = \frac{(5-)(2-)}{(7)(3)} = \frac{5-}{7} \times \frac{2-}{3}$$

$$\frac{49-}{3} = \frac{(7-)(7-)}{(3)(7)} = \frac{14-}{3} \times \frac{7}{7} = 4 \frac{2}{3} \times 3 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} = 6 \text{ وهكذا...}$$

وكون ضرب الاشارات في حقل الأعداد النسبية يطابق تماماً ضربها في

حلقة الأعداد الصحيحة، أي أن:

يكون حاصل ضرب عددين لسبيين موجباً اذا كان للعددين النسبية

الاشارة نفسها ويكون حاصل ضرب العددين النسبيين سالباً اذا كان للعددين

النسبيين اشارتان مختلفتان.

وأما عملية القسمة في حقل الأعداد النسبية فتعرف كما يلي:

اذا كان  $\frac{a}{b}$  ،  $\frac{c}{d}$  عددين نسبیین

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \text{مقلوب } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \text{مقلوب } \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

مثال:

$$\frac{14}{15} = \frac{7}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \div \frac{2}{3}$$

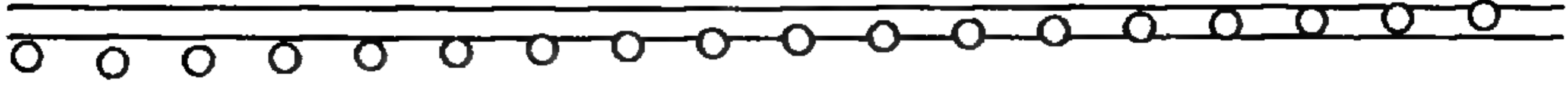
$$\frac{8-27}{27} = \frac{1 \times 8 - 27 \times 1}{27} = \frac{8}{27} - \frac{1}{1}$$

$$\frac{8-27}{27 \times 9} = \frac{9 \times 2 - 27 \times 1}{27 \times 9} = \frac{2}{27} - \frac{1}{9}$$

$$19 = \frac{19}{1} = \frac{27}{1} \times \frac{19}{27} = \frac{19}{27 \times 9}$$







## أمثلة محلولة

### مثال (١)

أوجد  $\frac{9}{3} + \frac{2}{15}$  ،  $\frac{9}{3} + \frac{2}{15}$

$$\frac{121}{15} = \frac{135 + 6}{45} = \frac{15 \times 9 + 3 \times 2}{15 \times 3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{15}$$

$$\frac{47}{15} =$$

$$\frac{141}{45} = \frac{6 + 135}{45} = \frac{2 \times 3 + 15 \times 9}{15 \times 3} = \frac{2}{15} + \frac{9}{3}$$

$$\frac{47}{15} =$$

$$\frac{47}{15} = \frac{47}{15} \text{ ولما كان}$$

فإن  $\frac{2}{15} + \frac{9}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{15}$  وهذا المثال يجسّد الخاصية  
التبديلية للجمع في حقل الأعداد النسبية

### مثال (٢):

أوجد  $\frac{2}{15} - \frac{9}{3}$  ،  $\frac{9}{3} - \frac{2}{15}$

$$\frac{129-}{45} = \frac{135 - 6}{45} = \frac{15 \times 9 - 3 \times 2}{3 \times 15} = \frac{9}{3} - \frac{2}{15}$$

$$\frac{129}{45} = \frac{6 - 135}{45} = \frac{2 \times 3 - 15 \times 9}{15 \times 3} = \frac{2}{15} - \frac{9}{3}$$

$$\frac{129}{45} \neq \frac{129-}{45} \text{ ولما كان}$$

فإن  $\frac{2}{15} - \frac{9}{3} \neq \frac{9}{3} - \frac{2}{15}$  وهذا المثال يجسّد الخاصية غير

التبديلية للطرح في حقل الأعداد النسبية



مثال (٣):

أوجد  $\frac{2}{15} \times \frac{9}{3}$  ،  $\frac{9}{3} \times \frac{2}{15}$

$$\frac{2}{5} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{9}_3}{\cancel{3}_1}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{\cancel{2}_2}{\cancel{5}_1} \times \frac{\cancel{9}_3}{\cancel{3}_1}$$

ولما كان  $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

فإن  $\frac{2}{15} \times \frac{9}{3} = \frac{9}{3} \times \frac{2}{15}$  وهذا المثال يجسد الخاصية

التبديلية للضرب في حقل الأعداد النسبية

مثال (٤):

أوجد  $\frac{2}{15} \div \frac{9}{3}$  ،  $\frac{9}{3} \div \frac{2}{15}$

$$\frac{2}{45} = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{2}_2}{\cancel{15}_3} = \frac{9}{3} \div \frac{2}{15}$$

$$\frac{45}{2} = \frac{\cancel{9}_3}{\cancel{2}_1} \times \frac{\cancel{15}_3}{\cancel{2}_1} = \frac{2}{15} \div \frac{9}{3}$$

ولما كان  $\frac{45}{2} \neq \frac{2}{45}$

فإن  $\frac{2}{15} \div \frac{9}{3} \neq \frac{9}{3} \div \frac{2}{15}$  وهذا المثال يجسد الخاصية غير

التبديلية للقسمة في حقل الأعداد النسبية

مثال (٥):

أوجدنا  $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$  ،  $\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$

بعد الحل المطول والبسيط ينتج أن:



## المجموعات والأعداد

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{23}{12} = \frac{3}{4} + \frac{6}{7} = \frac{3}{4} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) \\ \frac{23}{12} = \frac{10}{8} + \frac{2}{3} = \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \end{array} \right. \text{ وكذلك}$$

الخاصية التحقق لعملية الجمع في حقل الأعداد النسبية

وكذلك للضرب حيث:

$$\frac{1}{4} = \frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{1}{\cancel{3}} = \frac{3}{4} \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\cancel{1}}{4} \times \frac{1}{\cancel{1}} = \left( \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \right) \times \frac{2}{3} \text{ وحيث}$$

وأما للطرح والقسمة فلا تتحقق الخاصية... تأكد أنت من ذلك؟

مثال (٦):

$$\left( \frac{21}{4} \times \frac{2}{7} \right) + \left( \frac{14}{3} \times \frac{2}{7} \right), \left( \frac{21}{4} + \frac{14}{3} \right) \times \frac{2}{7}$$

$$\left( \frac{3 \times 21 + 4 \times 14}{4 \times 3} \right) \times \frac{2}{7} = \left( \frac{21}{4} + \frac{14}{3} \right) \times \frac{2}{7}$$

$$\frac{17}{6} = \frac{\cancel{17}}{\cancel{6}} \times \frac{1}{\cancel{1}} = \left( \frac{63 + 56}{12} \right) \times \frac{2}{7} =$$

$$\frac{17}{6} = \frac{9 + 8}{6} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \left( \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \times \frac{1}{\cancel{1}} \right) + \left( \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} + \frac{2}{\cancel{1}} \right)$$

$$\left( \frac{21}{4} \times \frac{2}{7} \right) + \left( \frac{14}{3} \times \frac{2}{7} \right) = \left( \frac{21}{4} + \frac{14}{3} \right) \times \frac{2}{7} \text{ أي أن}$$

وهذا المثال يجسد خاصية توزيع عملية الضرب على عملية الجمع في حقل

الأعداد النسبية.

والسؤال الآن هل تتوزع عملية الجمع على الضرب؟

$$\left( \frac{21}{4} + \frac{2}{7} \right) \times \left( \frac{14}{3} + \frac{2}{7} \right) \stackrel{?}{=} \left( \frac{21}{4} \times \frac{14}{3} \right) + \frac{2}{7}$$

## المجموعات والأعداد



$$\frac{347}{14} = \frac{343 + 4}{14} = \frac{49}{2} + \frac{2}{7} = \left( \frac{21}{2} \times \frac{14}{7} \right) + \frac{2}{7}$$

$$24,78 =$$

$$\frac{147 + 8}{28} \times \frac{98 + 6}{21} = \left( \frac{21}{2} + \frac{2}{7} \right) \times \left( \frac{14}{3} + \frac{2}{7} \right)$$

$$27,41 = \frac{4030}{147} = \frac{100 \times 26}{147} = \frac{100}{28} \times \frac{26}{21} =$$

الجواب: لا.

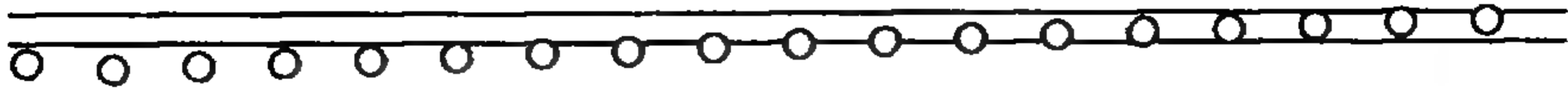
"فالضرب يتوزع على الجمع فقط" أما الجمع فلا يتوزع على الضرب.

والسؤال الآن هل تتوزع عملية الضرب على عملية الطرح في حقل الأعداد

النسبية؟ تأكد مما تقول. بأمثلة فقط.



## المجموعات والأعداد



التمثيل العشري للأعداد النسبية في (ك، +، ٠)

كون العدد النسبي  $\frac{أ}{ب}$  كسر عادي بأبسط صورة، بسطه أ ومقامه ب،  
لذا فإنه يمكن كتابته على صورة كسر عشري بوحدة من الطريقتين التاليتين:

× تمثيل عشري منته وذلك بقسمة البسط على المقام كما في الأمثلة التالية:

$$٠,٧٥ = \frac{٣}{٤} , ٠,٢ = \frac{٢}{١٠} , ٠,٠ = \frac{١٠}{٢} \text{ وهكذا}$$

× تمثيل عشري غير منته ولكنه متكرر -دوري- Recuving Decimal وذلك بقسمة  
البسط على المقام كما في الأمثلة التالية:

$$\frac{٢}{٩} = ٠,٢٢٢٠٠٠ = ٠.\overline{٢} \text{ والأصفار علامة التكرار}$$

$$\frac{١}{٣} = ٠,٣٣٣٠٠٠ = ٠.\overline{٣} \text{ والأصفار علامة التكرار}$$

$$\frac{٥٦}{٩٩} = ٠,٥٦٥٦٥٦ = ٠.\overline{٥٦}$$

$$\frac{١}{٩} = ٠,٩٩٩٠٠٠ = ٠.\overline{٩} \text{ وهكذا...}$$

والعكس صواب أي يمكن وضع الكسر العشري بصورة عدد نسبي  
 $\frac{أ}{ب}$  كما يلي:

× فالعدد النسبي المولد للكسر العشري ٠,٨ هو:

$$\frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٠}$$

× العدد النسبي المولد للكسر العشري ٠,٧ هو:

بما أن  $٠,٧٧٧٠٠٠ = ٠.\overline{٧}$  لاحظ تكرار الرقم ٧

$$\text{أي أن } ٠,٧ = \frac{٧}{١٠} + \frac{٧}{١٠٠} + \frac{٧}{١٠٠٠}$$

ويوضح س  $٠.\overline{٧}$



## المجموعات والأعداد



∴ س =  $\frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$  وبعد ضرب الطرفين بالعدد ١٠

(كون رقم واحد يدور أو يتكرر)

$$س + V = \left( \dots + \frac{V}{1000} + \frac{V}{100} + \frac{V}{10} \right) + V = س$$

$$\therefore 10 \text{ س} = 7 + \text{س}$$

٩س = ٧ ← س =  $\frac{٧}{٩}$  العدد النسبي المولد للكسر العشري  $٠.\overline{٧}$

وكذلك ما العدد النسبي المولد للكسر العشري  $0.\overline{37}$ .

$$\cdot 272727 \dots = \overline{\cdot 27}$$

$$\dots + \frac{rV}{1 \dots \dots \dots} = \frac{rV}{1 \dots \dots \dots} = \frac{rV}{1 \dots} =$$

ويوضع س =  $\overline{0.37}$

∴ س =  $\frac{37}{100} + \frac{37}{1000} + \frac{37}{10000} + \dots$  وبعد ضرب الطرفين

بالعدد ۱۰۰ (کون رقمین پیدوران او بتکران)

$$\left( \dots + \frac{37}{1\dots\dots\dots} + \frac{37}{1\dots\dots\dots} + \frac{37}{1\dots} \right) + 37 = \dots \therefore \text{اس}$$

$$100 \text{ اس} = 37 + \text{اس}$$

٩٩س = ٣٧ ← س =  $\frac{٣٧}{٩٩}$  العدد النسبي المولد للكسر العشري  $٠.\overline{٣٧}$ .

### ملحوظة:

ولمعرفة فيما اذا كان العدد النسبي يولد كسر عشري منتهى أو لا نقول:

بعد تبسيط العدد النسبي  $\frac{1}{5}$  ، فإذا كان عوامل المقام ب هما ( ٢ ، ٥ ) فقط

فإنه منته مثل  $\frac{3}{10}$  وإذا كان عوامل المقام هما (٣ ، ٧) فإنه دوري مثل  $\frac{5}{21}$  هكذا.

وهناك خاصية التكاثف للأعداد النسبية ومفادها أن حقل الأعداد النسبية

(ك، +، ٠) كثيف أي أن بين أي عددين نسبيين غير متساويين أعداد نسبية عديدة.





## المجموعات والأعداد

فالعديدين  $\frac{أ}{ب}$  ،  $\frac{ج}{د}$  وعندما  $\frac{ج}{د} > \frac{أ}{ب}$  يوجد أعداد نسبية عديدة ومنها على سبيل المثال:

$$\frac{\frac{ج}{د} + \frac{أ}{ب}}{2} = \text{العدد}$$

مثال:

بين العديدين النسبيين  $\frac{1}{3}$  ،  $\frac{1}{5}$  أعداد نسبية عديدة منها:

$$\frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{5+3}{10} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{2} = \text{العدد الأول}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{1}{\cancel{2.5}} =$$

وينتج أن  $\frac{1}{3} > \frac{4}{10} > \frac{1}{5}$  وبين العديدين النسبة  $\frac{1}{5}$  ،  $\frac{4}{10}$  هناك أعداد نسبية عديدة منها:

$$\frac{7}{30} = \frac{35}{70} = \frac{20+10}{70} = \frac{\frac{4}{10} + \frac{1}{5}}{2} = \text{العدد الثاني}$$

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{\cancel{4.2857}} =$$

وهكذا..

$$\frac{1}{3} > \frac{4}{10} > \frac{7}{30} > \frac{1}{5}$$

وتمثيلها على خط الأعداد يمكن أن يكون:



ومن أجل التحقق من صحة ما سبق توحيد المقامات كالتالي:

$$\frac{10}{30} > \frac{8}{30} > \frac{7}{30} > \frac{6}{30}$$



## المجموعات والأعداد



× حقل الأعداد الحقيقية (ج، +، ٠): Real Field

حقل الأعداد الحقيقية (ح، +، ٠) نظام رياضي ذو عمليتين ثنائيتين مكون من ثلاثي مرتب:

مسقطه الأول مجموعة الأعداد الحقيقية Real Number

وهي المجموعة المكونة من مجموعة الأعداد الطبيعية ط = {١، ٢، ٣، ٠٠٠}

مجموعة الأعداد الكلية ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٠٠٠}

ومجموعة الأعداد الصحيحة ص = {٠، ±١، ±٢، ±٣، ٠٠٠}

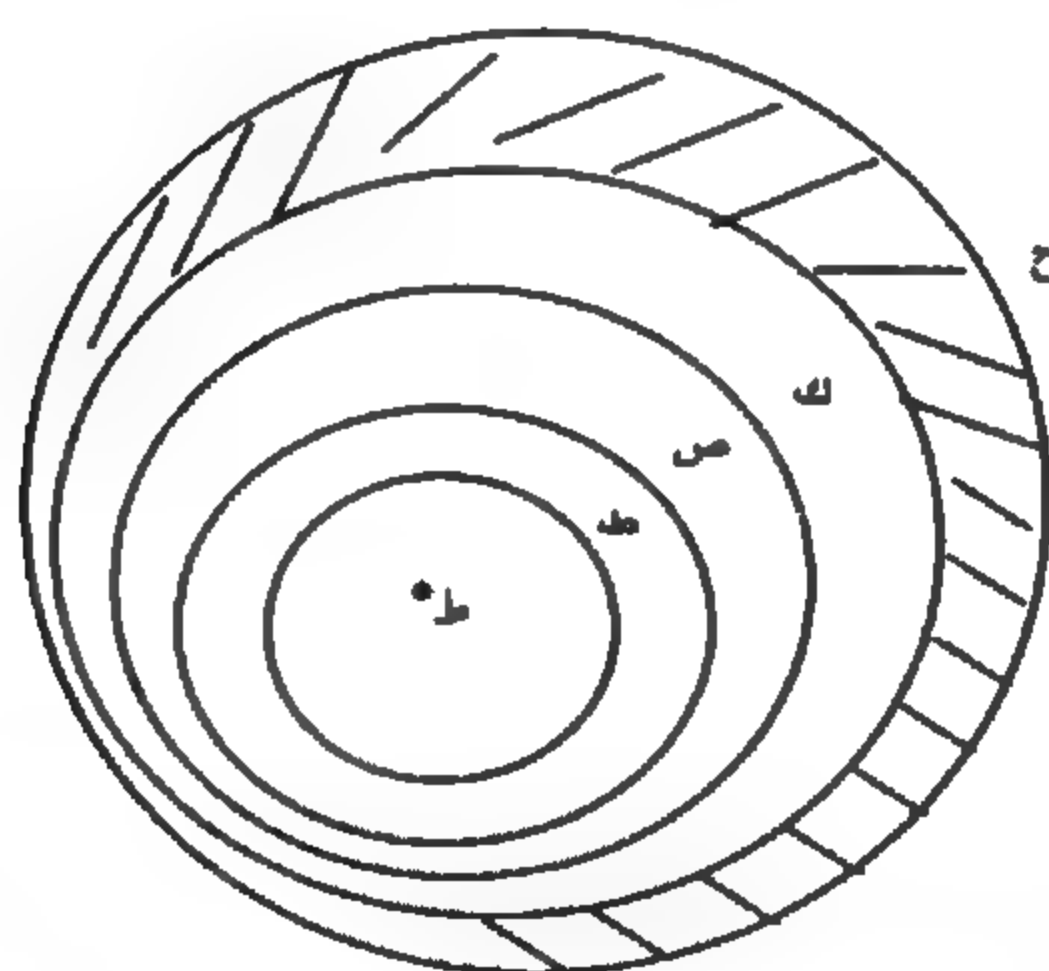
ومجموعة الأعداد النسبية ك = {أ، ب، ٠، ±٣، ±٢، ±١، ٠٠٠}

وأعداد أخرى حقيقية لا تنتمي الى أي من المجموعات السابقة

تسمى الأعداد غير النسبية Irrational Numbers

مثل:

$\pi \approx 3.14$ ، ٢، ٣، ٥ وغيرها كما في المخطط التالي:



حيث المنطقة المظلة تمثل الأعداد الحقيقية غير النسبية وهي ح - ك فالعدد

الحقيقي هو العدد الطبيعي ٤ والعدد الكلي صفر والعدد الصحيح - ٥ والعدد

النسبي  $\frac{3}{4}$  والكسر العشري المنحني ٠.٧٥ والكسر العشري الدوري ٠.٤ والعدد

غير الدوري مثل ٠.١٥١١٥١١٥٠٠٠ جميعها أعداد حقيقية.



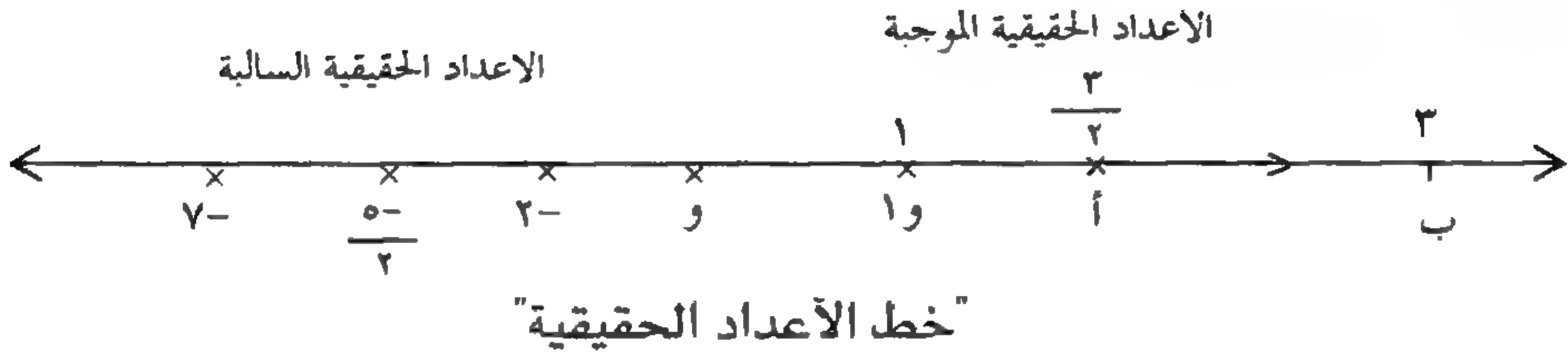
## المجموعات والأعداد



ومسقطه الثاني عملية الجمع العادية (+)

ومسقطه الثالث عملية الضرب العادية (•)

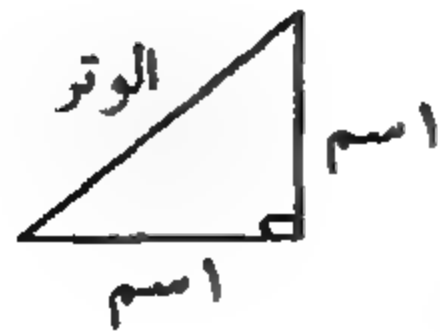
والآن جاء الوقت لنطلق على خط الأعداد اسم "خط الأعداد الحقيقية"  
كون جميع الأعداد هي أعداد حقيقية (ما عدا المركبة منها) ويمكن تمثيلها  
بنقط على خط الأعداد كما يلي:



والسؤال الذي يتبادر الى الأذهان الآن هو:

لماذا الأعداد الحقيقية، ألا تكفي الأعداد النسبية والصحيحة والكلية  
والطبيعية لأغراض القياس لدى الانسان؟  
والجواب:

عندما نقول مكثنا في مدينة العقبة ثلاثة أيام (عدد طبيعي) وأقمنا في  
فندق منخفض عن سطح البحر بمقدار خمسة أمتار (عدد صحيح) وتناولنا فيه ثلثي  
سمكة كبيرة (عدد نسبي)، فإننا لا نستطيع استخدام عناصر من هذه المجموعات  
العددية (الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية) لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية  
طولا كل من ضلعي القائمة فيه ١ سم هكذا:



(الوتر)  $2 = 1^2 + 1^2$  (نظرية نتباغوري الشهيرة)

∴ الوتر  $\sqrt{2}$  هذا العدد ليس نسبياً ولا صحيحاً ولا كلياً ولا طبيعياً، لذلك  
نحتاج الى استخدام مجموعة أخرى للقياس تضم أعداداً مثل  $\sqrt{3}$ ،  $\sqrt{5}$ ،  $\sqrt{7}$ ، ...  
تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية. من هنا كان حقل الأعداد الحقيقية (ح، +، •)



## المجموعات والأعداد



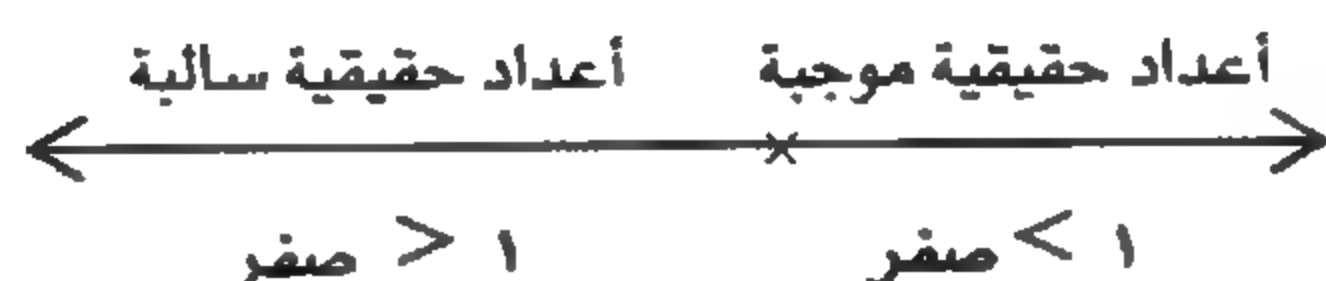
ومن الجدير بالذكر أن اجراء العمليات الأربع: جمع (+)، طرح (-)، ضرب ( $\times$ )، وقسمة ( $\div$ ) في حقل الأعداد الحقيقية (ح، +،  $\cdot$ ) يطابق تماماً اجرائها في حقل الأعداد النسبية (ك، +،  $\cdot$ ) لذا لا نود اعادة ذكرها في هذا السياق.

ولحقل الأعداد الحقيقية من الخصائص والصفات ما ليس لغيره من الحقول والحلقات نوردتها هنا كما يلي:

$\times$  علامة الترتيب في حقل الأعداد الحقيقية:

وتترجم علاقة الترتيب بالاشارات  $<$  أكبر من،  $>$  أصغر من أو  $\leq$  أكبر من أو يساوي،  $\geq$  أصغر من أو يساوي.

والأعداد الحقيقية ح إما أن تكون سالبة ح<sup>-</sup> أو صفراء أو موجبة ح<sup>+</sup> كما هو واضح من الشكل:



وبالرموز  $\text{ح} = \text{ح}^- \cup \{0\} \cup \text{ح}^+$

والمجموعات الثلاث ح<sup>-</sup>، {0}، ح<sup>+</sup> منفصلة

أي أن  $\text{ح}^- \cap \{0\} = \text{ح}^- \cap \text{ح}^+ = \{0\} \cap \text{ح}^- = \emptyset$

وهذا ما يسمى قانون التئمين Tracheotomy Law الرياضيات وخاصة احدى ثلاث.

لكل  $a \in \text{ح}$  فإن  $a < \text{صفر}$  (موجب)

أو  $a = \text{صفر}$

أو  $a > \text{صفر}$  (سالب)

أي أن  $a \leq \text{صفر}$

فمثلاً  $\frac{3}{5} < \text{صفر}$ ،  $\text{صفر} = \text{صفر}$ ،  $-\sqrt{2} > \text{صفر}$  وهكذا..





ولكل  $a$  ،  $b \in \mathbb{R}$  ، ولكون:

$a - b$  عدد حقيقي طبعاً.

فإن  $a - b$  عدد حقيقي موجب عندما  $a < b$

وإن  $a - b$  عدد حقيقي هو الصفر عندما  $a = b$

وإن  $a - b$  عدد حقيقي سالب عندما  $a > b$

وباختصار مفيد:

أما  $a < b$  أو  $a = b$  أو  $a > b$

وهذا ينتج من قوة علاقة الترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقية.

لذا يسمى حقل الأعداد الحقيقية ( $\mathbb{R}$ ،  $+$ ،  $\cdot$ ) حقل مرتب

لذا يمكن كتابة علاقة الترتيب بالأشكال التالية:

$a < b$  والتفسير العدد الحقيقي  $a$  أكبر من العدد الحقيقي  $b$

$a \leq b$  والتفسير العدد الحقيقي  $a$  أكبر من أو يساوي العدد الحقيقي  $b$

وبالاجاز  $a \leq b \iff a < b \text{ أو } a = b$

وكذلك  $a > b$  والتفسير العدد الحقيقي  $a$  أصغر من العدد الحقيقي  $b$

$a \geq b$  والتفسير العدد الحقيقي  $a$  أصغر من أو يساوي العدد الحقيقي  $b$

أي أن  $a \geq b \iff a > b \text{ أو } a = b$

وكذلك  $a < b \iff a \leq b \text{ أو } a > b$

وأخيراً  $a \leq b \iff a < b \text{ أو } a = b$  أو  $a > b$

## المجموعات والأعداد



والأمثلة عديدة ومنها على سبيل المثال:

$$5 \leq x \leftarrow (x < 5) \text{ أو } (x = 5) \text{ مع أن } x = 5 \text{ خطأ}$$

إلا أن  $5 \leq x$  صواب.

$$\text{وكذلك } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \leftarrow \left( \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \right) \text{ أو } \left( \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{مع أن } \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \text{ خطأ}$$

$$\text{إلا أن } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ صواب}$$

ولعلاقة الترتيب العديد من الخصائص نجملها بما يلي:

، إذا كان للعددين الحقيقيين أ ، ب نفس الإشارة

فإن (أ) (ب)  $\leftarrow$  صفر

$$\text{مثل } (5+) (5+) = (5-) (5-) = (5+) (5-) = (5-) (5+) < \text{ صفر}$$

وإذا كان لهما إشارات مختلفة فإن (أ) (ب)  $>$  صفر

$$\text{مثل } (5+) (5-) = (5-) (5+) = (5-) (5-) = (5+) (5+) > \text{ صفر}$$

× إذا كان أ  $<$  ب وكان ج  $\exists$  ح فإن:

$$أ + ج < ب + ج$$

$$\text{مثل } 5 < 7 \leftarrow 5 + 3 < 7 + 3 \leftarrow 8 < 10$$

× إذا كان أ  $<$  ب وكان ج  $\exists$  ح<sup>+</sup> فإن:

$$أ \cdot ج < ب \cdot ج$$

$$\text{مثل } 6 < 8 \leftarrow 6 \times \frac{1}{2} < 8 \times \frac{1}{2} \leftarrow 3 < 4$$

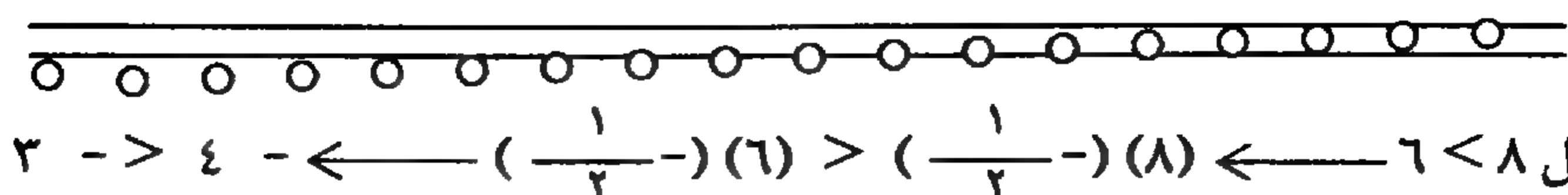
× إذا كان أ  $<$  ب وكان ج  $\exists$  ح<sup>-</sup> فإن:

$$أ \cdot ج > ب \cdot ج \text{ (تعكس إشارة الترتيب < الى >)}$$





## المجموعات والأعداد



مثل  $8 < 16 \leftarrow (8) \left( -\frac{1}{2} \right) > (16) \left( -\frac{1}{2} \right) \leftarrow 4 - > 2 -$  فان  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  (المقلوب)

تعكس الاشارة

$$\text{مثل } 2 < 3 \leftarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

× اذا كان أ ، ب  $\exists$  ح<sup>+</sup> وكان أ < ب  $\leftarrow$  فان  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  (المقلوب)

تعكس الاشارة

$$\text{مثل } (3 -) > (2 -) \leftarrow -\frac{1}{3} < -\frac{1}{2}$$

مثال:

بيّن أن أ<sup>2</sup> ≤ صفر عندما أ  $\exists$  ح

الحل مكون من شقين:

عندما أ < صفر  $\leftarrow$  أ . أ  $\leftarrow$  (موجب) (موجب)

$\leftarrow$  موجب < صفر

وعندما أ > صفر  $\leftarrow$  أ . أ  $\leftarrow$  (سالب) (سالب)

$\leftarrow$  موجب < صفر

مثل:  $5 < \text{صفر} \leftarrow (5)^2 = 25 < \text{صفر}$

وعندما أ = صفر  $\leftarrow$  فإن أ<sup>2</sup> = صفر

-  $5 > \text{صفر} \leftarrow (-5)^2 = 25 > \text{صفر}$

∴ أ<sup>2</sup> ≤ صفر





الجزور Roots في حقل الأعداد الحقيقية (ح، +، ٠)

نبدأ بمناقشة المفاهيم التالية:

(i) المربع الكامل Complete Square:

هو العدد الحقيقي الموجب الناتج عن حاصل ضرب عددين حقيقيين متساويين موجبين أو حاصل ضرب العدد الحقيقي الموجب في نفسه:

$$\text{فالعدد } ٢٥ \text{ مربع كامل لأنه يساوي } ٥ \times ٥ = ٥^2$$

$$\text{وكذلك العدد } ٤٩ \text{ مربع كامل لأنه يساوي } ٧ \times ٧ = ٧^2$$

$$\text{والعدد الحقيقي } ٠.٢٥ \text{ مربع كامل لأنه يساوي } ٠.٢٥ \times ٠.٢٥ = (٠.٢٥)^2$$

والسؤال الآن: هل العدد الحقيقي ٢٢٥ مربع كامل؟

والجواب: نستطيع معرفة فيما إذا كان العدد ٢٢٥ مربع كامل أو لا بتحليله الى العوامل الأولية ووضعه بصورة أسية للأس "٢" هكذا:

٥	٢٢٥
٥	٤٥
٣	٩
٣	٣
	١

$$\text{فالعدد } ٢٢٥ = ١٥ \times ١٥ = (١٥)^2 \text{ فهو مربع كامل}$$

وأما العدد ٧٧ فليس مربع كامل كونه لا يمكن

وضعه بصورة أسية للأس ٢

والسؤال الآن معكوس: ما هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه مرتين أنتج العدد

$$٥٢٢٥$$

$$\text{الجواب: هو } ١٥ \text{ لأن } ١٥ \times ١٥ = (١٥)^2 = ٢٢٥$$

وعند صياغة السؤال السابق على الشكل:

ما هو الجذر التربيعي Square Root للعدد ٥٢٢٥

الجواب: الجذر التربيعي للعدد ٢٢٥ هو ١٥





ونعبر عن ذلك بالرموز هكذا:

$$\sqrt{225} = 15 \text{ حيث الرمز } \sqrt{\quad} \text{ يسمى الجذر التربيعي}$$

والعدد ٢ يسمى دليل الجذر

كما يمكن أن يسمى الجذر الثاني وزمراً  $\sqrt{\quad}$  الدليل ٢ لا يكتب بشكل عام

والجذر الثالث  $\sqrt[3]{\quad}$  الدليل ٣ يسمى الجذر التكعيبي

والجذر الرابع  $\sqrt[4]{\quad}$  الدليل ٤

وهكذا

حتى الجذر النوني  $\sqrt[n]{\quad}$  والدليل ن عدد طبيعي كونه ١

أي أن  $n > 1$

وكذلك  $\sqrt[64]{64} = 64$

٢	{	٢		٦٤
×		٢		٣٢
٢	{	٢		١٦
×		٢		٨
٢	{	٢		٤
×		٢		٢
٢	{	٢		١

نحلل العدد ٦٤ الى عوامله الأولية هكذا:

ونأخذ من كل عاملين (الدليل ٢) متساويين

عامل واحد ونضربها في بعضها هكذا:

$$\sqrt[64]{64} = \sqrt[2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2]{64}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 =$$

٢	{	٢		١٩٦
×		٢		٩٨
٧	{	٧		٤٩
×		٧		٧
٧	{	٧		١

وبنفس الأسلوب:  $7 \times 2 = \sqrt[196]{196}$

$$14 =$$





ملحوظة:

لو سألنا أنفسنا هذا السؤال: ما هو العدد الحقيقي الذي اذا ضرب في نفسه مرتين أنتج العدد - ١٦ (وبشكل عام عدد حقيقي سالب) لكان الجواب هذا مستحيل كون العدد السالب \* نفسه = موجب وكون العدد الموجب \* نفسه = موجب.

لذا يمكن أن يقال بشكل عام:

أي أن  $\sqrt{s}$ ،  $s \leq$  صفر فالربع الكامل دائماً عدد موجب.

وجذره التربيعي موجب ايضاً.

والمطلوب الآن إيجاد  $\sqrt{77}$

وبما أن العدد الحقيقي ٧٧ ليس مربعاً كاملاً كما أسلفنا من قبل فإنه عند تحليله الى عوامله لا ينتج عوامل زوجية متطابقة.

لكن لا تيأس، فهناك طريقتان لإيجاد  $\sqrt{77}$  بشكل خاص، وكذلك لإيجاد  $\sqrt{s}$ ، حيث  $s$  مربع غير كامل بشكل عام، شرط أن  $s \leq$  صفر دائماً. هما:

الطريقة التقريبية:

والتي لا تنتج عدداً حقيقياً دقيقاً بل مقرب كما يلي:

لايجاد  $\sqrt{77}$  نحصر العدد ٧٧ بين مربعين كاملين متتاليين. والمربعان الكاملان المتتاليان هما المربعان الكاملان لعددتين حقيقيين متتاليين،

وفي هذا السياق ندون بعض المربعات الكاملة أو مربعات الأعداد الحقيقية

من ١ الى ١٠ كما يلي:



## المجموعات والأعداد



العدد	مربعه
١	$1 = 1^2 = 1 \times 1$
٢	$4 = 2^2 = 2 \times 2$
٣	$9 = 3^2 = 3 \times 3$
٤	$16 = 4^2 = 4 \times 4$
٥	$25 = 5^2 = 5 \times 5$
٦	٣٦ ←
٧	٤٩ ←
٨	٦٤ ←
٩	٨١ ←
١٠	١٠٠ ←

وهكذا ..

نعود لإيجاد  $\sqrt{77}$

$64 < 77 < 81$  ،  $81 > 77 > 64$  مربعان كاملان متتاليان

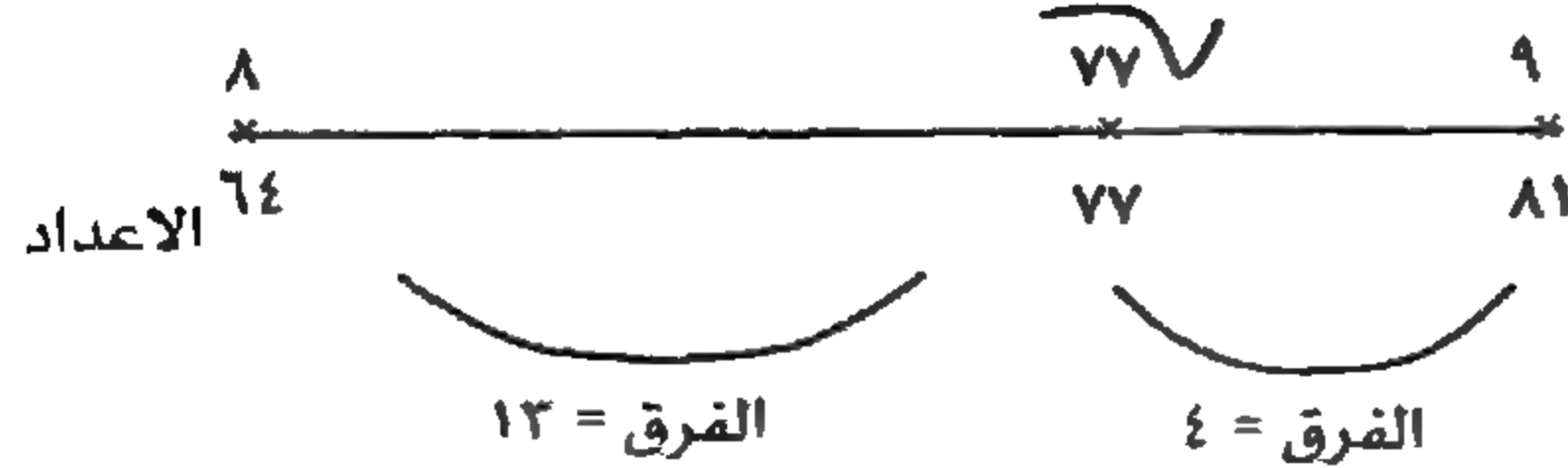
وبأخذ الجذر التربيعي للأطراف  $\sqrt{81} > \sqrt{77} > \sqrt{64}$

أي أن  $\sqrt{81} > \sqrt{77} > \sqrt{64}$

أي أن  $\sqrt{77} \in (8, 9)$

وبما أن العدد ٧٧ أقرب الى العدد ٨١

الجذور التربيعية



فإن  $\sqrt{77}$  أقرب الى  $\sqrt{81}$

أي أن  $\sqrt{77}$  أقرب للعدد ٩

وهذا التقريب ينتج بعد أن نجد منتصف المسافة بين العددين ٨ ، ٩ هكذا:

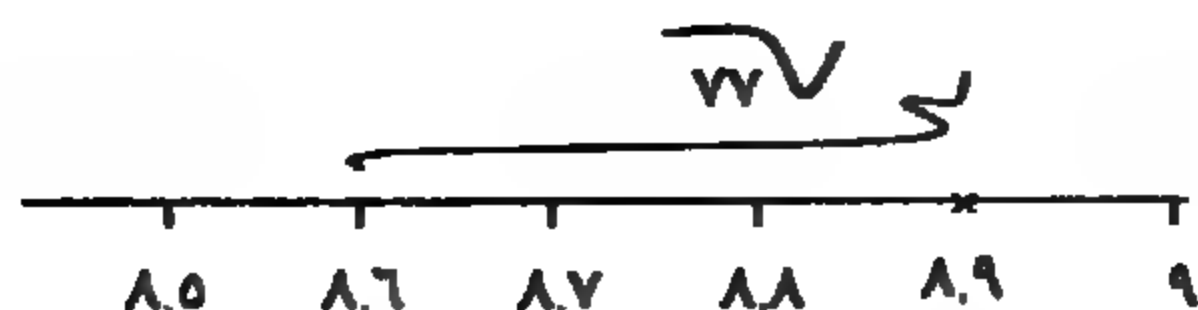
$$8.5 = \frac{8 + 9}{2}$$



## المجموعات والأعداد



أي أن  $\sqrt[3]{1.6} \in \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9\}$



ولكن الجواب الأقرب الى الحقيقة هو ما يمكن ايجاده بالطريقة الثانية:

الطريقة الدقيقة: ويتم بإيجاد  $\sqrt[3]{1.6}$  بواسطة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب هكذا:

$1.8 = \sqrt[3]{1.6}$  باستخدام الآلة الحاسبة ولأقرب منزلة عشرية واحدة

لاحظ أن  $1.8 \in \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9\}$

(ii) المكعب الكامل Complete Cubic:

هو العدد الحقيقي (الموجب أو السالب) الناتج عن حاصل ضرب ثلاثة أعداد متساوية سواء أكانت موجبة أو سالبة في بعضها.

فالعدد 1 مكعب كامل لأن  $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$

والعدد -1 مكعب كامل لأن  $-1 = (-1) \times (-1) \times (-1) = (-1)^3$

والعدد 27 مكعب كامل لأن  $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

والعدد -64 مكعب كامل لأن  $-64 = (-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$

والعدد 0.125 مكعب كامل لأن  $0.125 = 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.5^3$

وهكذا....

والسؤال الآن: هل العدد الحقيقي 64 مكعب كامل؟

والجواب: نستطيع معرفة فيما اذا كان العدد 64 مكعب كامل أولاً وذلك بتحليله

الى عوامله الأولية "وضعه بصورة أسية للأس 2" هكذا:





## المجموعات والأعداد



فالعدد  $64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$  فهو مكعب كامل

وأما العدد ٧٧ فليس مكعب كامل كونه لا يمكن وضعه بصورة أسية للأس ٣  
والسؤال الآن معكوس: ما هو العدد الذي اذا ضرب في نفسه ثلاث مرات أنتج العدد  
٥٦٤

الجواب: العدد هو ٤ لأن  $64 = 4 \times 4 \times 4$

ويمكن صياغة السؤال السابق على الشكل التالي:

ما هو الجذر التكعيبي Cubi Croot للعدد ٥٦٤

والجواب: الجذر التكعيبي للعدد ٦٤ هو ٤

وبالرموز  $4 = \sqrt[3]{64}$  الدليل "٣"

ويمكن أن يسمى  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  الجذر الثالث.

مثال:

أوجد  $\sqrt[3]{216}$

	٢	٢١٦
٢ {	٢	١٠٨
	٢	٥٤
٣ {	٣	٢٤
	٣	٩
	٣	٣
		١

نحل العدد ٢١٦ الى عوامله الأولية

ونأخذ من كل ثلاثة عوامل أولية

متطابقة عامل واحد ونضربها في

بعضها هكذا:

$$6 = 3 \times 3 = \sqrt[3]{216}$$

مثال:

أوجد  $\sqrt[3]{8}$





نحلل العدد - ٨ الى عوامله الأولية

كعوامل سالبة ونأخذ من كل ثلاثة

عوامل أولية متطابقة عامل ونضربها

في بعضها هكذا:

$$\therefore \sqrt[3]{-8} = -2$$

مع ملاحظة أن نهاية التحليل يجب أن تعطى العدد "١" الموجب

تنبيه!!!

عندما يكون الدليل زوجي مثل  $\sqrt[n]{s}$ ،  $\sqrt[n]{s}$ ،  $\sqrt[n]{s}$ ، ...

فما بداخل الجذر ( العدد س ) يجب أن يكون موجب أو صفر

أي أن س  $\leq$  صفر  $\exists$  ح  $\cup \{0\}$  فقط.

وعندما يكون الدليل فردي مثل  $\sqrt[n]{s}$ ،  $\sqrt[n]{s}$ ،  $\sqrt[n]{s}$ ، ...

فما بداخل الجذر (العدد س) يمكن أن يكون موجب أو صفر أو سالب

أي أن س  $\exists$  ح

والمطلوب الآن ايجاد  $\sqrt[3]{77}$

بما أن العدد ٧٧ ليس مكعباً كاملاً كما أسلفنا من قبل، فإنه عند

تحليله الى عوامله الأولية لا ينتج عوامل متطابقة ثلاثية.

ولكن لا تيأس فهناك طريقتان لإيجاد  $\sqrt[3]{77}$  بشكل خاص أي أن  $\sqrt[3]{s}$

س مكعب غير كامل بشكل عام.

علماً بأن س  $\exists$  ح أي موجب أو صفر أو سالب.

وبأسلوب مماثل لأسلوب ايجاد  $\sqrt[3]{77}$  نجد  $\sqrt[3]{77}$  وهكذا:

## المجموعات والأعداد



الطريقة التقريبية: نحصر العدد ٧٧ بين مكعبين كاملين متتالين.

والمكعبان الكاملان المتتاليان هما المكعبان الكاملان لعددتين حقيقيين متتالين وفي هذا السياق ندون بعض المكعبات الكاملة أو مكعبات الأعداد الحقيقية من ١ إلى ١٠ هكذا:

العدد	مكعبه
١	$1 = 1^3 = 1 \times 1 \times 1$
٢	← ٨
٣	← ٢٧
٤	← ٦٤
٥	← ١٢٥
٦	← ٢١٦
٧	← ٣٤٣
٨	← ٥١٢
٩	← ٧٢٩
١٠	← ١٠٠٠

وهكذا ..

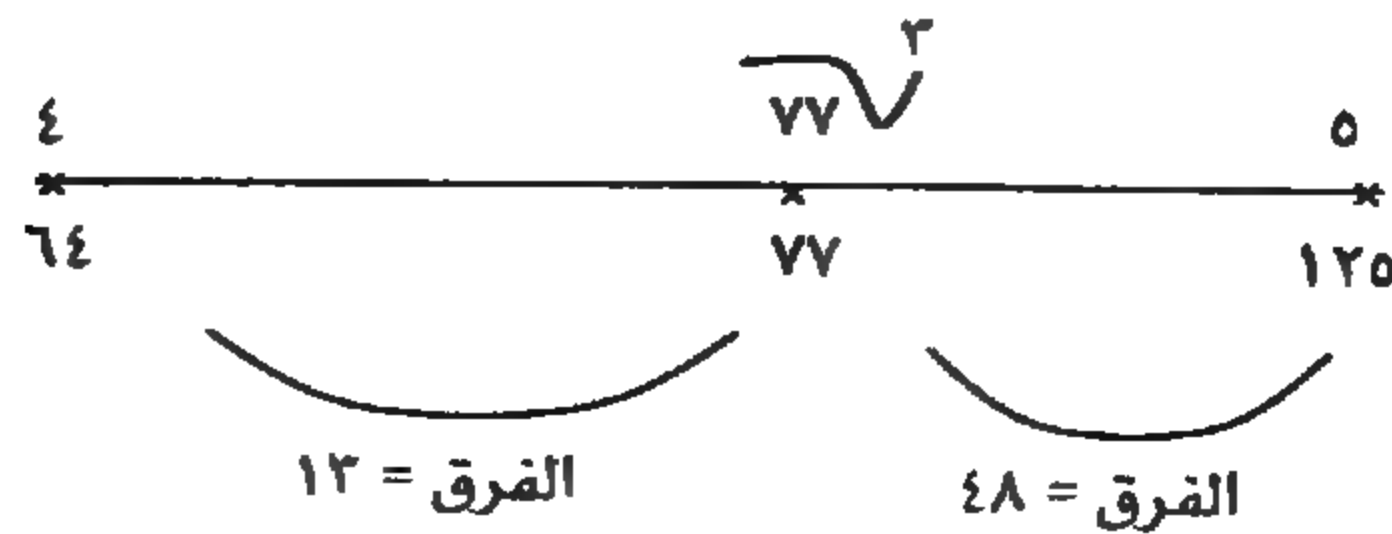
بما أن ٦٤ ٧٧ ١٢٥ (٦٤ ، ١٢٥ مكعبان متتاليان)

وبأخذ الجذر التكعيبي لجميع الأطراف  $\sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{77} > \sqrt[3]{64}$

ومنها  $5 > \sqrt[3]{77} > 4$

والآن نود معرفة ان قيمة  $\sqrt[3]{77}$  أهى أقرب للعدد ٤ أم للعدد ٥ ؟

هكذا:





بما أن العدد ٧٧ أقرب للعدد ٦٤ كون الفرق بينهما أقل من الفرق بين ٧٧ ،

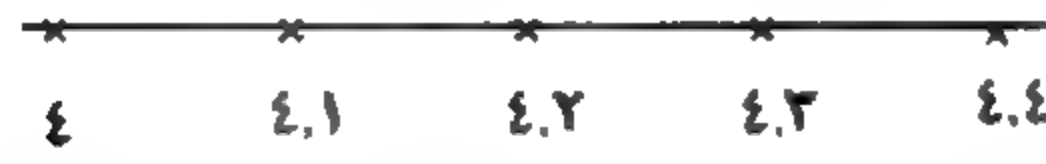
١٢٥ كما في الشكل.

فإن  $\sqrt[3]{77}$  أقرب للعدد ٤

وهذا التقريب ينتج كما يلي:

نجد منتصف المسافة بين العددين ٤ ، ٥ هكذا:  $4.5 = \frac{4 + 5}{2}$

لذا فإن  $\sqrt[3]{77}$  يمكن أن تساوي واحد من الأعداد التالية:



أي أن

$$\{4.4, 4.3, 4.2, 4.1\} \ni \sqrt[3]{77}$$

ولكن الجواب الأقرب الى الحقيقة هو ما يمكن ايجاده بالطريقة الثانية:

الطريقة الدقيقة: يتم ايجاد  $\sqrt[3]{77}$  بواسطة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب

هكذا:

$$4.2 = \sqrt[3]{77} \text{ باستخدام الآلة الحاسبة}$$

ولأقرب منزلة عشرية واحدة.

لاحظ أن  $4.2 \ni \{4.4, 4.3, 4.2, 4.1\}$

دونك الآن بعض خصائص الجذور التربيعية والتكعيبية بشكل خاص:

\* لكل س ، ص  $\exists$  ح<sup>+</sup> (موجبة فقط)

$$\sqrt[n]{\frac{s}{v}} = \frac{\sqrt[n]{s}}{\sqrt[n]{v}} \text{ فإن والعكس أيضاً صواب.}$$

$$\sqrt[n]{\frac{s}{v}} = \frac{\sqrt[n]{s}}{\sqrt[n]{v}} \text{ أي أن}$$



مثال:

$$\frac{9}{11} = \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{121}} = \sqrt[3]{\frac{81}{121}}$$

وكذلك:

$$2 = \sqrt[3]{8} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[3]{\frac{64}{16}}$$

\* لكل س ، ص  $\exists$  ح<sup>+</sup> (موجبة فقط)

فإن  $\sqrt[3]{س \cdot ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$  والعكس أيضاً صواب

أي أن  $\sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{س \cdot 1} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{1}$

مثال:

$$2,5 = 25 \times 0,1 = \sqrt[3]{625} \times \sqrt[3]{0,1} = \sqrt[3]{625 \times 0,1}$$

وكذلك:

$$10 = \sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{20 \times 50} = \sqrt[3]{20} \times \sqrt[3]{50}$$

\* لكل س ، ص  $\exists$  ح

فإن  $\sqrt[3]{س \cdot ص} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{ص}$

والعكس أيضاً صواب

أي أن  $\sqrt[3]{س} = \sqrt[3]{س \cdot 1} = \sqrt[3]{س} \times \sqrt[3]{1}$

مثال:

$$20 - = (4)(5 -) = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{125 -} = \sqrt[3]{(64)(125 -)}$$

وكذلك:

$$10 - = \sqrt[3]{1000 -} = \sqrt[3]{(200)(5 -)} = \sqrt[3]{200} \times \sqrt[3]{5 -}$$





× لكل س ، ص ∃ ح  
فإن  $\sqrt[n]{\frac{ص}{ص}} = \frac{\sqrt[n]{ص}}{\sqrt[n]{ص}}$  ، ص ≠ صفر

والعكس أيضاً صواب.

أي أن  $\sqrt[n]{\frac{ص}{ص}} = \frac{\sqrt[n]{ص}}{\sqrt[n]{ص}}$  ، ص ≠ صفر

مثال:

$$0.7 = \frac{7}{10} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{1000}} = \sqrt[3]{\frac{343}{1000}}$$

وكذلك:

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\frac{8}{1}} = \sqrt[3]{\frac{8}{1}}$$

مثال:

ما قيمة  $(1 + \sqrt{5})^2$  بأبسط صورة

$$(1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = (1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})$$

وهذا ما يسمى بقانون التوزيع

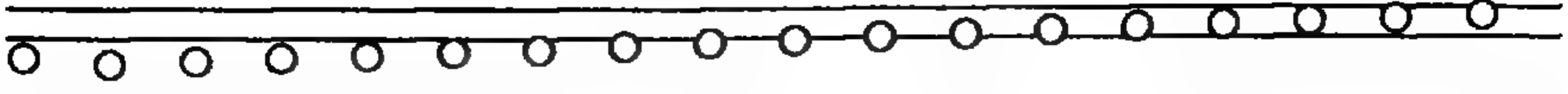
$$1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 =$$

$$6 + 2\sqrt{5}$$

هناك ما يسمى انطاق المقام Rationalizing the Denominator:

والمقصود بعملية انطاق المقام أن نضع العدد على صورة كسر عادي مقامه

ليس جذراً على الاطلاق وذلك بضربه في مرافقه Conjugate.



مثال:

اكتب صورة أخرى للعدد  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  لا يظهر الجذر في مقامه (انطقه)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \text{ حيث } \sqrt{2} \text{ هو مرافق } \sqrt{2} \text{ كما يُقال.}$$

واكتب العدد  $\frac{1}{4 + 5\sqrt{}}$  بصورة لا يظهر الجذر في مقامه

$$\frac{4 - 5\sqrt{}}{11} = \frac{4 - 5\sqrt{}}{16 - 5} = \frac{4 - 5\sqrt{}}{4 - 5\sqrt{}} \times \frac{1}{4 + 5\sqrt{}}$$

$$= \frac{4}{11} + \frac{5\sqrt{}}{11} \text{ (حيث } 4 - 5\sqrt{} \text{ هو مرافق } 4 + 5\sqrt{} \text{ كما يُقال)}$$





الفترات في حقل الأعداد الحقيقية

ويرمز لها بالرمز "ف":

والفترات مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ح تعتمد على علاقة الترتيب وتقسم الى قسمين محدودة وغير محدودة كما يلي:

الفترات المحدودة:

هي الفترات التي طولها عدداً حقيقياً محدوداً وتظهر على أشكال منها:

$$\times \text{ فترة مغلقة } [a, b] = \{s \in \mathbb{R} : a \leq s \leq b\}$$

مثل:

$$\{s \in \mathbb{R} : 2 \leq s \leq 5\} = [2, 5]$$

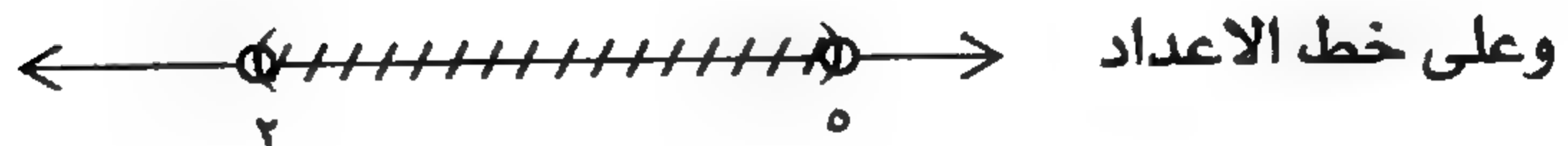


والعددان  $a, b$  يسميان أطراف الفترة و  $a, b \in [a, b]$  وطولها  $5 - 2 = 3$  وحدات طولية.

$$\leftarrow \text{ فترة مفتوحة } (a, b) = \{s \in \mathbb{R} : a < s < b\}$$

مثل:

$$\{s \in \mathbb{R} : 2 < s < 5\} = (2, 5)$$



والعددان  $a, b$  يسميان أطراف الفترة

لكن  $a, b \notin (a, b)$

وطولها  $5 - 2 = 3$  وحدات طولية



## المجموعات والأعداد



← فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة):

$$[a, b) = \{s \in \mathbb{R} : a \leq s < b\}$$

$$\text{وكذلك } (a, b] = \{s \in \mathbb{R} : a < s \leq b\}$$

$$\text{مثل } [2, 5) = \{s \in \mathbb{R} : 2 \leq s < 5\}$$

$$\text{وكذلك مثل } (2, 5] = \{s \in \mathbb{R} : 2 < s \leq 5\}$$

لكن  $a \in [a, b)$  و  $b \notin [a, b)$  وللعكس للأخرى.

وطول كل منها  $5 - 2 = 3$  وحدات.

ومن الملاحظ أن الطول نفسه لجميع الفترة المحدودة سواء أكانت مغلقة أو مفتوحة أو نصف هذه وتلك.

والفترات غير المحدودة: هي الفترات التي طولها ليس عدداً حقيقياً.

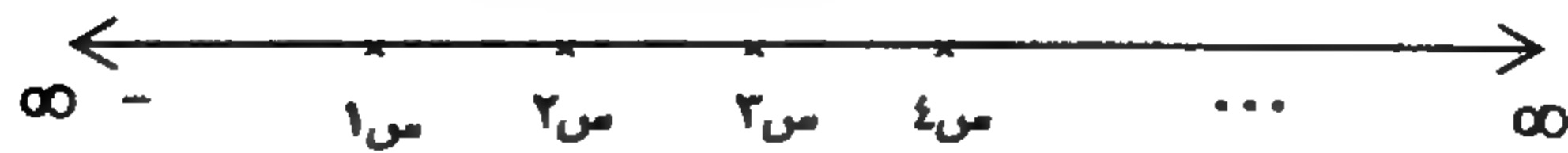
ولذلك سوف تستخدم الرولين  $\infty$  ويُقرأ موجب ما لا نهاية

و  $-\infty$  ويُقرأ سالب ما لا نهاية

علماً بأن الرمز  $\infty$ ،  $-\infty$  ليسا من الأعداد الحقيقية، ولكن لكل عدد

حقيقي  $s$  يكون  $-\infty < s < \infty$

وهذا واضح من خط الاعداد الحقيقية التالي:



فأياً من  $s^1, s^2, s^3, s^4, \dots$  هو على خط الاعداد فهو محصور

بين الرمز  $-\infty, \infty$  والفترات غير المحدودة هي التي أحد أطرافها  $\infty$  أو  $-\infty$

كما يلي:





لكل  $a \in \mathbb{R}$

فإن  $[a, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, a \leq s\}$  كما في الشكل



وكذلك  $(a, \infty) = \{s : s \in \mathbb{R}, a < s\}$  كما في الشكل



ثم  $(-\infty, a] = \{s : s \in \mathbb{R}, s \leq a\}$



وكذلك  $(-\infty, a) = \{s : s \in \mathbb{R}, s < a\}$



مثال:

تحرر عن المجموعات التالية باستخدام رمز الفترة ومثلها على خط الأعداد.

$$F_1 = \{s : s \in \mathbb{R}, s \leq 3\}$$

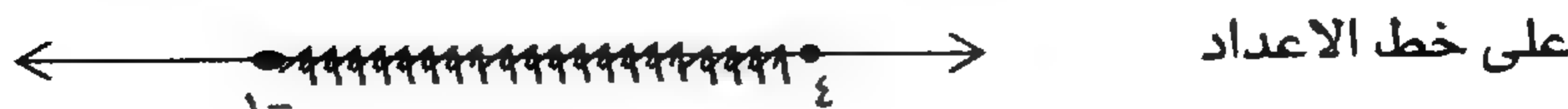
$$F_1 = (-\infty, 3]$$



مثال:

مثل الفترة  $[-1, 4]$  على خط الأعداد وجد طولها

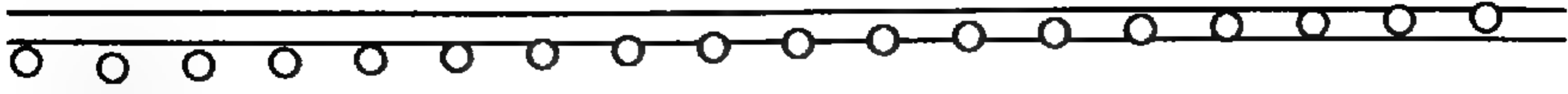
$$[-1, 4] = \{s : s \in \mathbb{R}, -1 \leq s \leq 4\}$$



$$\text{طول الفترة } [-1, 4] = 4 - (-1) = 4 + 1 = 5 \text{ وحدات طول}$$

وفي هذا السياق سنتناقش بإيجاز اتحاد وتقاطع الفترات كما يلي:

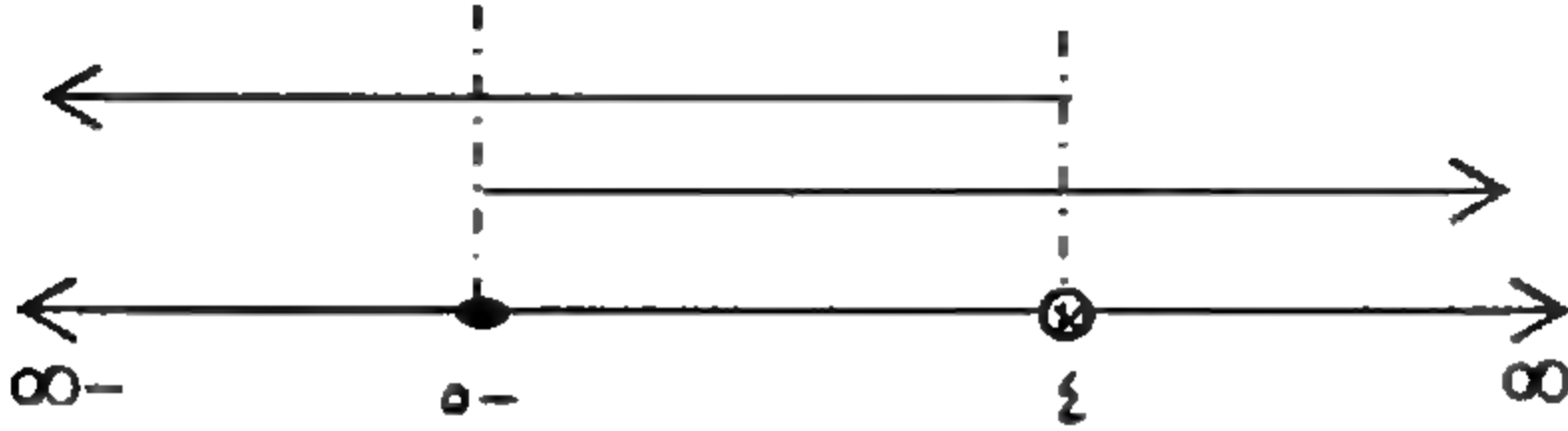
## المجموعات والأعداد



وبما أن الفترات هي مجموعات جزئية من خط الأعداد الحقيقية فهناك اتحاد الفترات وتقاطعها كما في هذه السطور:

مثال:

$$\text{أوجد } (-\infty, 5) \cap (4, \infty)$$

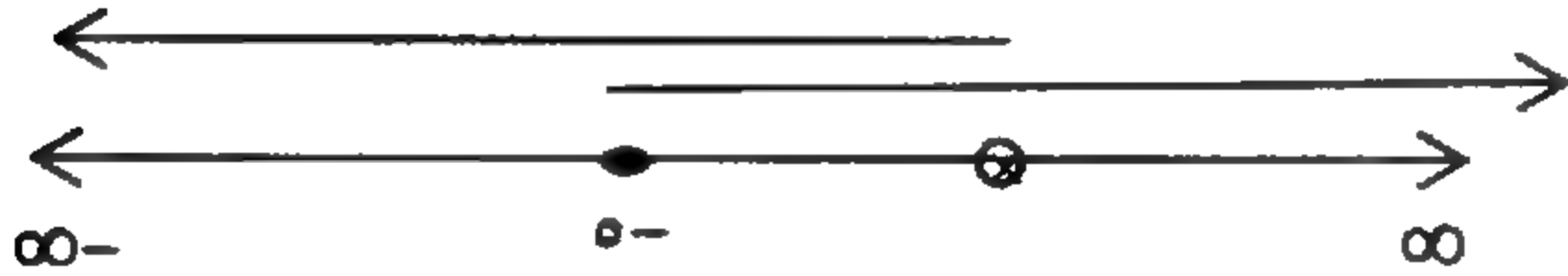


التوضيح على خط الأعداد:

التقاطع هو الجزء المشترك وهو:  $(4, 5)$

$$\therefore (4, 5) = (-\infty, 5) \cap (4, \infty)$$

$$\text{وكذلك } (-\infty, 5) \cup (4, \infty)$$



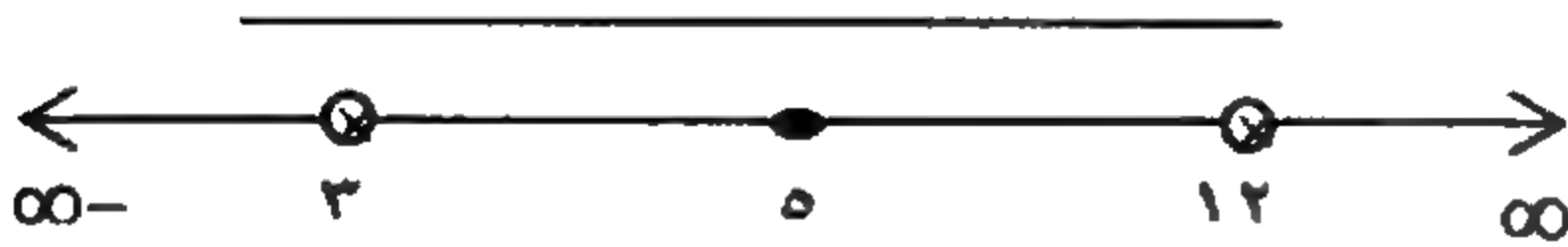
التوضيح على خط الأعداد

الاتحاد هو الأجزاء المشتركة وغير المشتركة وهي  $(-\infty, \infty)$

$$\therefore (-\infty, \infty) = (-\infty, 5) \cup (4, \infty)$$

مثال:

$$\text{أوجد } (5, 12) \cap [3, 5)$$



التوضيح على خط الأعداد

لا يوجد مشترك

$$\therefore \emptyset = (5, 12) \cap [3, 5)$$

$$\text{وكذلك } (5, 12) \cup [3, 5)$$

وكما على خط الأعداد..

فإن الاتحاد هي الأجزاء المشتركة وغير المشتركة وهي  $(3, 12)$

$$\therefore (3, 12) = (5, 12) \cup [3, 5)$$





### (١ - ١٧) أمثلة محلولة على المجموعات والأعداد

مثال (١):

اكتب مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من العدد ٧

جواب:

يمكن كتابة المجموعة المذكورة بصورتين:

الأولى:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  طريقة القائمة

الثانية:  $S = \{ص: ص \text{ عدد صحيح موجب أصغر من } ٧\}$  طريقة الوصف

مثال (٢):

إذا كانت  $S = \{5, 6, 3\}$  ،  $ص = \{3, 5, 6\}$

أي من العلاقات التالية بين المجموعتين  $S$  ،  $ص$  هي الصواب؟

(i)  $S \supset ص$  (ii)  $ص \supset S$  (iii)  $S = ص$

الجواب:

الثالثة  $S = ص$  كون العناصر في المجموعتين  $S$  ،  $ص$  نفسها ولا تختلف إلا بالترتيب

مثال (٣):

اكتب مجموعة مضاعفات العدد ٥

جواب:

$M = \{0, 5, 10, 15, \dots\}$

أو  $M = \{س: س \exists ٥ ص ، ص \text{ عدد صحيح موجب}\}$



مثال (٤):

بيّن الخطأ من الصواب فيما يلي:

(i) صفر  $\emptyset \ni \emptyset$  خطأ لأن  $\emptyset$  المجموعة الخالية لا تحوي عناصر على الإطلاق

(ii) صفر  $\emptyset \ni \{ \}$  صواب لأن  $\{ \}$  المجموعة الخالية لا تحوي عناصر على الإطلاق

مثال (٥):

اكتب مجموعة المجموعات الجزئية (مجموعة القوة) للمجموعة  $S = \{a, b\}$

بما أن عددها  $2^2 = 4$

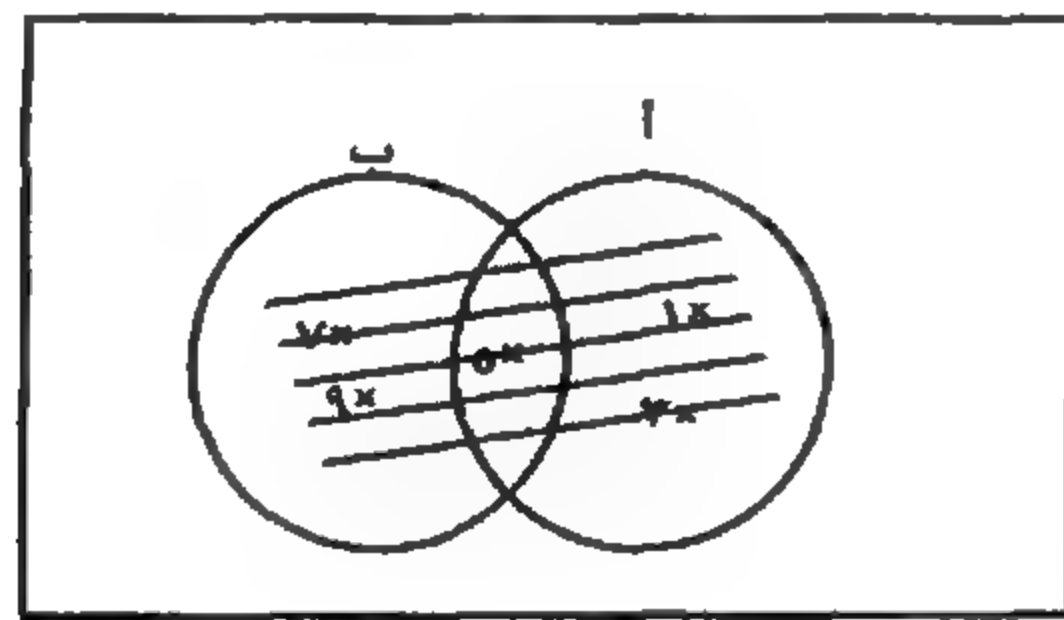
فهي  $S = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$ .

مثال (٦):

إذا كانت  $A = \{1, 2, 5\}$  ،  $B = \{5, 7, 9\}$

اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها ومثلها بمخططات فن أيضاً:

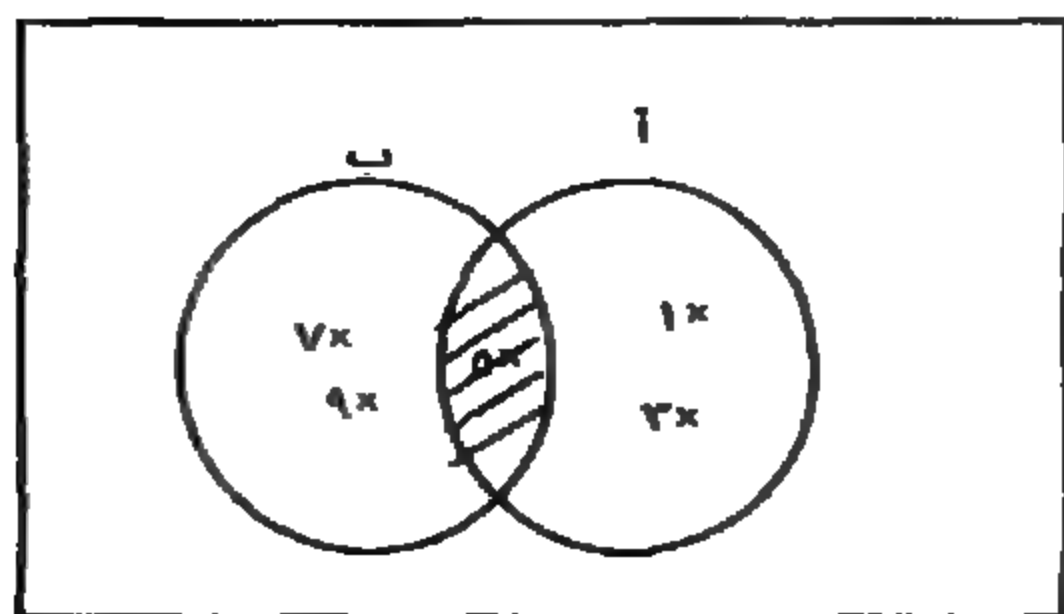
(i)  $A \cup B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$



$A \cup B$

"الاتحاد"

(ii)  $A \cap B = \{5\}$

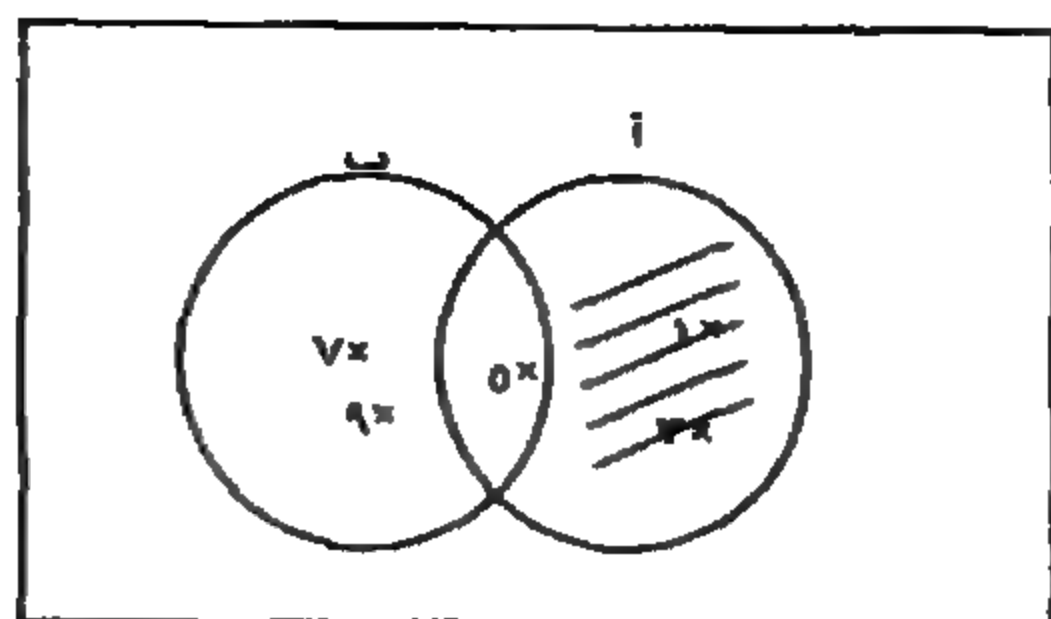


$A \cap B$

"تقاطع"



$$\{3, 1\} = \{9, 7, 5\} - \{5, 3, 1\} = \text{ب} - \text{أ} \quad (\text{iii})$$

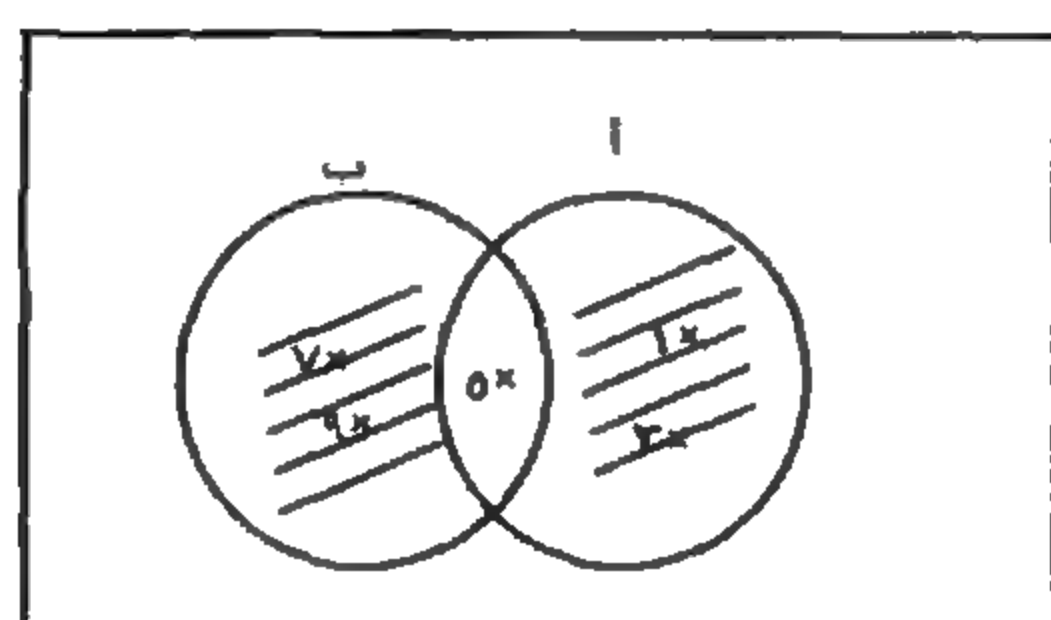


ب - أ

"الفرق"

$$(\text{ب} - \text{أ}) \cap (\text{أ} - \text{ب}) = \text{ب} \Delta \text{أ} \quad (\text{iv})$$

"الفرق التماثري"

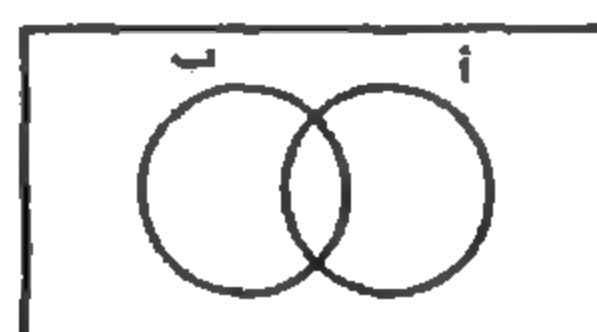


ب - أ

$$\{9, 7\} \cap \{3, 1\} =$$

$$\{9, 7, 3, 1\} =$$

مثال (٧):

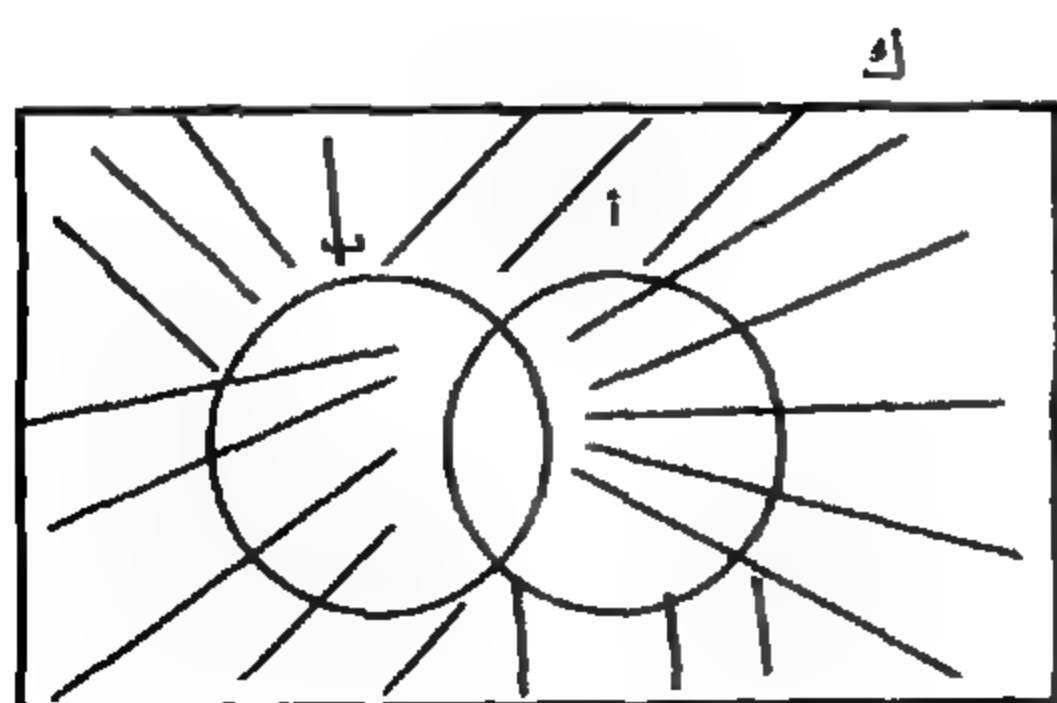


في الشكل التالي

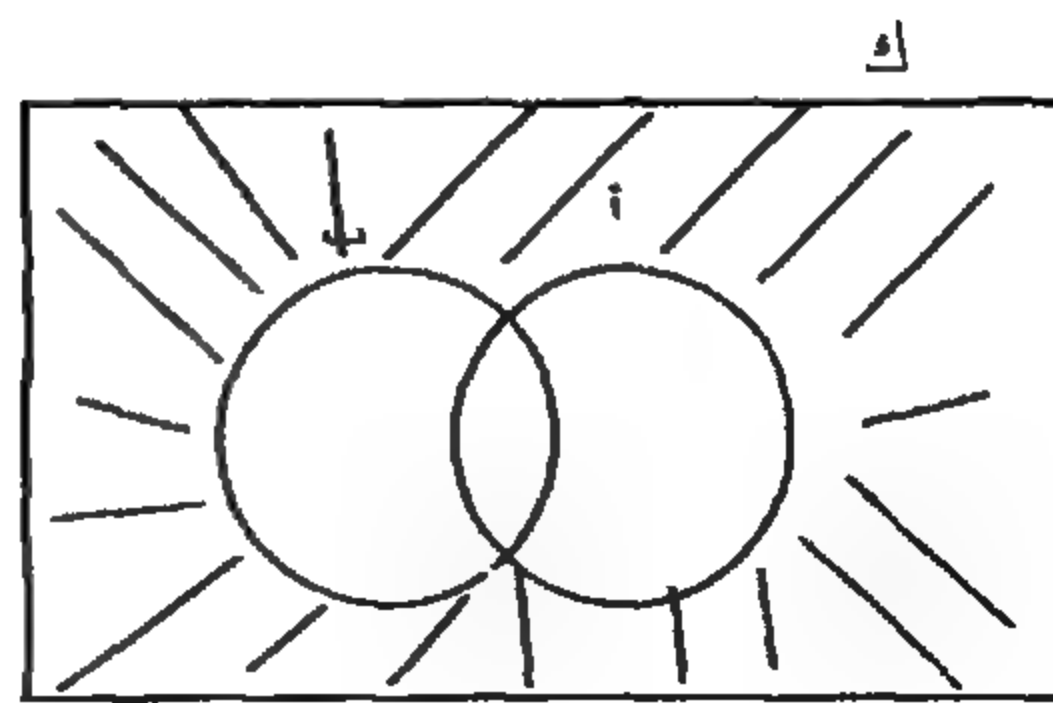
ظل (i)  $\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$

(ii)  $\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$

الجواب:



$\overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$

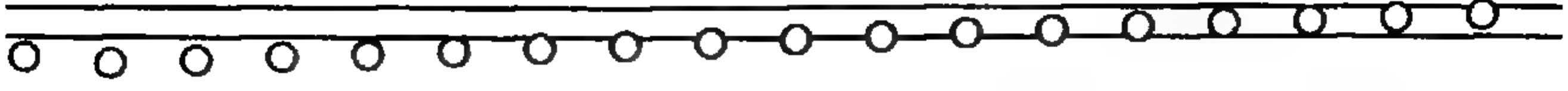


$\overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$

$$\text{كون } \overline{\text{أ} \cap \text{ب}} = \text{ك} - (\text{أ} \cap \text{ب})$$

$$\text{كون } \overline{\text{أ} \cup \text{ب}} = \text{ك} - (\text{أ} \cup \text{ب})$$





مثال (٨):

إذا كانت  $S = \{1, 2, 3\}$  ،  $V = \{1, 3, 5\}$  ،  $E = \{1, 2, 4\}$

بين أن:

(i)  $(S \cup V) \cup E = S \cup (V \cup E)$  الخاصية التحقيقية للاتحاد

(ii)  $S \cap (V \cap E) = (S \cap V) \cap E$  الخاصية التحقيقية للتقاطع

(iii)  $S \cup (V \cap E) = (S \cup V) \cap (S \cup E)$  الخاصية التوزيعية للاتحاد

على التقاطع.

دونك البيان بشيء من الإيجاز:

(i) الطرف الأيمن  $= (\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\}) \cup \{1, 2, 4\} =$

$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} =$

الطرف الأيسر  $= \{1, 2, 3\} \cup (\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\}) =$

$\{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} =$

$\{1, 2, 3, 4, 5\} =$  الطرف الأيمن.

(ii) الطرف الأيمن  $= (\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}) \cap \{1, 2, 3\} =$

$\{1\} = \{1\} \cap \{1, 2, 3\} =$

الطرف الأيسر  $= \{1, 2, 3\} \cap (\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\}) =$

$\{1\} = \{1\} = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3\} =$

(iii) الطرف الأيمن  $= (\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}) \cup \{1, 2, 3\} =$

$\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{1, 2, 3\} =$



$$\text{الطرف الأيسر} = (\{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4\}) \cap (\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5\}) =$$

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 2, 3, 5\} =$$

= الطرف الأيمن.

مثال (٩):

إذا كانت  $S = \{1, 2\}$  ،  $V = \{1, 3\}$  أوجد:

$$S \times S , S \times V , V \times V$$

$$S \times S = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

$$S \times V = \{1, 2\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3)\}$$

$$V \times V = \{1, 3\} \times \{1, 3\} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

مثال (١٠):

إذا كانت  $S = \{\text{عمان} , \text{بيروت} , \text{بغداد}\}$

$V = \{\text{لبنان} , \text{العراق} , \text{الأردن} , \text{مصر}\}$

اكتب العلاقة من  $S$  الى  $V$  حيث ترتبط كل عاصمة من  $S$  بدولتها من

$V$  على شكل أزواج مرتبة.

الجواب:

$$E = \{(\text{عمان} , \text{الأردن}) , (\text{بيروت} , \text{لبنان}) , (\text{بغداد} , \text{مصر})\}$$

مجالها المجموعة  $\{\text{عمان} , \text{بيروت} , \text{بغداد}\}$

مداها المجموعة  $\{\text{الأردن} , \text{لبنان} , \text{العراق}\} \supset V$



مثال (١١):

إذا كانت  $A = \{1 / 2 / 3 / 4 / 5\}$

اكتب قاعدة كل من العلاقات التالية على المجموعة  $A$

$$(i) \quad E_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$$

$$(ii) \quad E_2 = \{(1, 1)\}$$

$$(iii) \quad E_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

الجواب:

قاعدة  $E_1$  هي  $ص = س = 1$  ، لكل  $س$  ،  $ص \in A$

قاعدة  $E_2$  هي  $ص = س^2$  ، لكل  $س$  ،  $ص \in A$

قاعدة  $E_3$  هي  $ص = 2س$  ، لكل  $س$  ،  $ص \in A$

مثال (١٢):

صنف العلاقات التالية على المجموعة  $S = \{1, 2, 3\}$  اس

انعكاس ، تماثل ، تعدي ، تكافؤ

$$(i) \quad E_1 = \{(1, 1), (2, 2)\} \text{ الجواب ، تماثل}$$

$$(ii) \quad E_2 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\} \text{ الجواب ، تماثل وتعدي}$$

$$(1, 1)$$

$$(iii) \quad E_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \text{ الجواب تكافؤ}$$

## المجموعات والأعداد



مثال (١٣):

إذا كانت  $S = \{1, 2, 5\}$  ،  $V = \{2, 4, 6\}$

أي من العلاقات التالية من  $S$  إلى  $V$  تمثل اقتراناً:

$E_1 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 5)\}$  اقتران

كون المسقط الأول لم يكرر.

$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$  ليس اقتران ، بل علاقة

كون المسقط الأول تكرر.

$E_3 = \{(2, 5), (5, 4), (5, 6)\}$  اقتران (ثابت).

مثال (١٤):

ما قيمة كل مما يلي في حلقة الأعداد الصحيحة (ص، +، ٠)

$$(i) \quad (5-) (4-) \quad (ii) \quad (5-) + (4-)$$

$$(iii) \quad (5-) - (4+)$$

الجواب:

$(5-) = (4-) - 20$  لاختلاف الاشارتين في المضروب والمضروب فيه.

$$(5-) + (4-) + (1-) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

استعانة بوعاء الاشارات

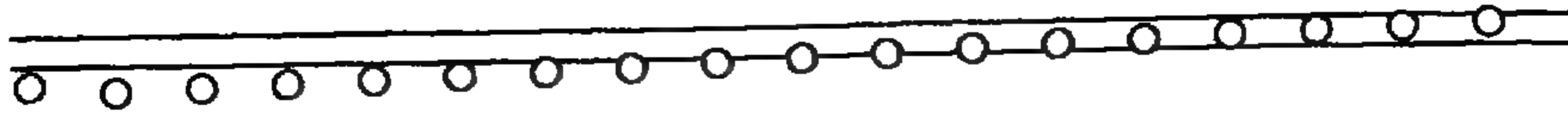
$$(5-) + (4-) = (4+) - (5-) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$$(9-) =$$

استعانة بوعاء الاشارات



## المجموعات والأعداد



مثال (١٥):

ضع واحدة من الاشارتين  $<$  ،  $>$  في الدائرة الواقعة بين كل من العددين التاليين:

(i)  $| ٨ - | \bigcirc | ٧ - |$

(ii)  $| ٨ - | \bigcirc | ٧ |$

(iii)  $(٨ -) \bigcirc | ٧ |$

الجواب:

$| ٨ - | > | ٧ - |$  كون  $٨ > ٧$  بعد ازالة القيمة المطلقة

بعد ازالة القيمة المطلقة  $٨ > ٧$

بعد ازالة القيمة المطلقة  $٨ - < ٧$

مثال (١٧):

حلل الأعداد التالية الى عواملها الأولية وضع الجواب بصورة أسية.

٢	١٢٨
٢	٦٤
٢	٣٢
٢	١٦
٢	٨
٢	٤
٢	٢
	١

(i)  $١٢٨$  الجواب  $٢^٧$

(ii)  $١٠٨$  الجواب  $٢^٣ \times ٣^٣$

٢	١٠٨
٢	٥٤
٣	٢٧
٣	٩
٣	٣
	١



## المجموعات والأعداد



٢	٢٥٠
٥	١٢٥
٥	٢٥
٥	٥
	١

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} \text{ (iii)}$$

مثال (١٧):

أوجد القاسم المشترك الأكبر "ق.م.أ."

"المضاعف المشترك الأصغر" م.م.أ. لكل من:

(i) ٧٢ ، ٢١٦

٢	٢١٦	٧٢
٢	١٠٨	٣٦
٢	٥٤	١٨
٣	٢٧	٩
٣	٩	٣
	٣	١

$$٧٢ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = \text{ق.م.أ.}$$

$$٣ \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٢} = \text{ق.م.أ.}$$

$$(٣) (٩) (٨) =$$

$$٢١٦ =$$

(ii) ٦٥ ، ٤٥ ، ٣٥

٥	٦٥	٤٥	٣٥
	١٣	٩	٧

$$٥ = \text{ق.م.أ.}$$

$$٤٠٩٥ = (٧) (٩) (١٣) (٥) = \text{ق.م.أ.}$$

(iii) ٥٧ ، ١٠

١	٥٧	١٠
	٥٧	١٠

$$١ = \text{ق.م.أ.}$$

$$(١٠) (٥٧) (١) = \text{ق.م.أ.}$$

$$٥٧٠ =$$







## المجموعات والأعداد



$$\begin{array}{r} 6,25 \\ 4 \overline{) 25} \\ \underline{24} \\ 10 \\ \underline{8} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 00 \end{array}$$

$$6,25 = \frac{25}{4}$$

$$\begin{array}{r} 0,8\overline{3} \\ 6 \overline{) 50} \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3} \text{ حيث } \overline{3} \text{ دوري}$$

$$\begin{array}{r} 0,1\overline{1} \\ 9 \overline{) 10} \\ \underline{9} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 10 \end{array}$$

$$\frac{1}{9} = 0,1\overline{1} \text{ حيث } \overline{1} \text{ دوري}$$

مثال (٢٠):

اكتب الكسور العشرية التالية  $2,4$  ،  $0,5$  ،  $0,2\overline{3}$

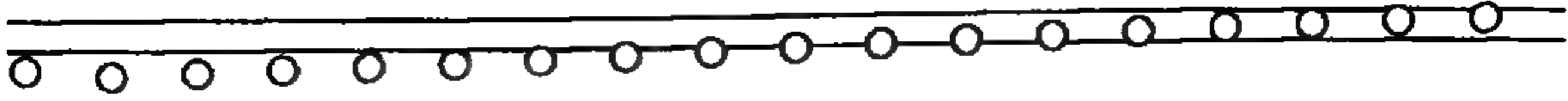
على صورة  $\frac{أ}{ب}$

الحل:

$$\frac{12}{5} = \frac{\cancel{12}^{\cancel{4}}}{\cancel{5}_0} = 2 \frac{4}{10} = 2,4$$



## المجموعات والأعداد



٥. : نفرض أن ١٠ (س = ٠,٥٥٥٠٠٠) كون منزله تدور

$$٥,٥٥٠٠٠ = اس$$

لكن اس = ٠,٥٥٥٠٠٠ طرفاً

$$\frac{٥}{٩} = س \leftarrow ٥ = س٩$$

$$\frac{٥}{٩} = ٥.\overline{٥}$$

$$٥.\overline{٢٣}$$

١٠٠ (س = ٠,٢٣٢٣٢٣٠٠٠) كون منزلتان تدوران

$$٢٣,٢٣٢٣٠٠٠ = اس$$

لكن اس = ٠,٢٣٢٣٢٣٠٠٠ طرفاً

$$\frac{٢٣}{٩٩} = س \leftarrow ٢٣ = س٩٩$$

$$\frac{٢٣}{٩٩} = ٢٣.\overline{٢٣}$$

مثال (٢١):

أوجد  $\sqrt[٣]{٢٣}$ ،  $\sqrt[٣]{٥٨}$  لأقرب منزلة عشرية

بما أن  $١٦ < ٢٣ < ٢٥$  منحصرة بين مربعين متتالين

$$\therefore \sqrt[٣]{٢٥} > \sqrt[٣]{٢٣} > \sqrt[٣]{١٦}$$

أي أن  $٥ > \sqrt[٣]{٢٣} > ٤$



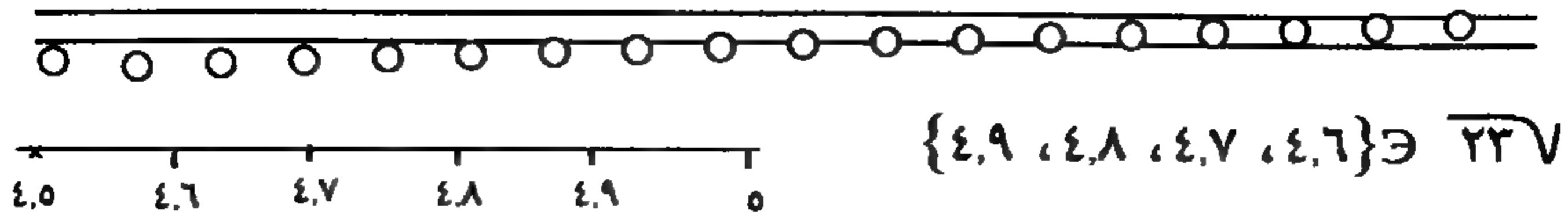
بما أن العدد ٢٣ أقرب الى العدد ٢٥

فإن  $\sqrt[٣]{٢٣}$  أقرب الى العدد ٥

$$\text{في المنتصف} \quad ٤,٥ = \frac{٥ + ٤}{٢}$$



## المجموعات والأعداد



والجواب الأقرب الى الحقيقة من الآلة الحاسبة هو:

4.7 لأقرب منزلة عشرية

لاحظ أن  $\{4.9, 4.8, 4.7, 4.6\} \subset 4.7$

مثال (22):

ما قيمة  $\sqrt{2} + \sqrt{8}$

$$\sqrt{8} - \sqrt{18}$$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{28}$$

$$\sqrt{7} \div \sqrt{28} \text{ بأبسط صورة}$$

نبسط كل من:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{1} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{8}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{1} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} - \sqrt{3 \times 2 \times 2} = \sqrt{8} - \sqrt{18}$$

كون الجذور (الأعداد غير النسبية المتشابهة تجمع وتطرح وغير المتشابهة لا)

والجذور المتشابهة ما كان دليل جذرها متساو وما بداخله ايضاً متساو.

$$\sqrt{7} \times \sqrt{7 \times 2 \times 2} = \sqrt{7} \times \sqrt{28}$$

$$\sqrt{7 \times 7 \times 2 \times 2} = \text{كجذر واحد}$$

$$14 = 7 \times 2 =$$

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{7} \div \sqrt{28}$$



## المجموعات والأعداد



مثال (٢٣):

انطق المقام كل من  $\frac{10}{1-\sqrt{5}}$  ،  $\frac{10}{\sqrt{5}}$

$$\sqrt{5}2 = \frac{\sqrt{5}10}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{10}{1}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{1-5} = \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \times \frac{1}{1-\sqrt{5}}$$

مثال (٢٤):

ما قيمة  $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$

باستخدام قانون التوزيع أو الضرب العمودي: فإن القيمة =

$$(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = \sqrt{3}\sqrt{3} - \sqrt{7}\sqrt{7}$$

$$4 = 3 - 7 = 3 - \sqrt{49} - \sqrt{49} + 7 =$$

مثال (٢٥):

عبّر عن المجموعات التالية باستخدام رمز الفترة، ومثلها على خط الأعداد

ف<sub>١</sub> = {س : س > ٥ ، ∃ س < ٥}

ف<sub>٢</sub> = {ص : ص > ٢ - ∃ ح - ٢ > س ≥ ٢}

الحل:

(٥ ، ∞) على شكل فترة



(- ٢ ، ٢) على شكل فترة





(١ - ١٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات

والدارسين

"المجموعات والاعداد"

(١) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها

- (i) مجموعة فصول السنة.
- (ii) مجموعة حروف كلمة مربع.
- (iii) مجموعة الدول العربية.
- (iv) مجموعة الأعداد الأولية المحصورة بين ٤ ، ١٤
- (v) مجموعة أرقام العدد ٧٧٧٦٦٥

(٢) اكتب المجموعات التالية بذكر صفة تميزها عن غيرها بكل وضوح.

- (i) مجموعة أشهر السنة الميلادية
- (ii) مجموعة عواصم الدول الأوروبية.
- (iii) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين العددين ٥ ، ٢٥
- (iv) مجموعة ألوان العلم الأردني.
- (v) مجموعة الجامعات الأردنية الحكومية.

(٣) ما عدد عناصر كل من المجموعات التالية:

$$(i) \{ \} = , (ii) \{ ٠ \} = أ , (iii) \{ ع : ع كوكب سيار \} = ب$$

## المجموعات والاعداد



(iv) ج = { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٠٠٠ } ، (v) مجموعة أحرف كلمة السلام.

(٤) اذا كانت  $\{ ٨ ، ٦ ، ٤ ، ٢ \} = أ$

ب = { س : س  $\exists$  ط ، س  $\geq$  ٨ }

فأي من العبارات التالية صواب:

(i)  $أ = ب$  (ii)  $أ \supset ب$  (iii)  $ب \supset أ$  (iv)  $أ \exists ب$

(٥) اذا كانت س = { أ ، ب ، ٥ } فاملأ المربعات التالية بواحد من الرموز التالية:

،  $\supset$  ،  $\exists$  ،  $=$

(iv)  $\{ ب \} \square س$

(i)  $أ \square س$

(v)  $ج \square س$

(ii)  $\{ أ \} \square س$

(vi)  $\{ أ ، ب ، ج \} \square س$

(iii)  $\phi \square س$

ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

(٦) اذا كانت

$\{ ١ ، ٢ ، ٣ \} = أ$

ب = { ٢ ، ٤ ، ٥ }

اكتب المجموعات التالية وفصلها بأشكال فن:

(ii)  $أ \cap ب$  (iii)  $ب - أ$

(i)  $أ \cup ب$

(v)  $أ \vee ب$  (vi)  $\overline{أ \cup ب}$

(iv)  $أ - ب$

(vii)  $أ \Delta ب$



(٧) اذكر الوضع المعاكس لكل من:

(i) ٨ درجات سلسيوسية تحت الصفر (ii) دائن (iii) خسارة

(iv) زيادة ٧ كغ (v)  $\frac{1}{2}$

(٨) أوجد الجذر التربيعي للعدد ٧٠٥٦ {٨٤}

(٩) أوجد الجذر التكعيبي للعدد ٥١٢ ، {٨}

(١٠) ما ناتج:

$$\left\{ \frac{9}{10}, \frac{5}{8}, \frac{1-}{12}, \frac{19}{12} \right\} \quad \frac{5}{6} + \frac{3}{4} \quad (i)$$

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \quad (ii)$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \quad (ii)$$

$$\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} \quad (iii)$$

(١١) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨} ،

ع = {س : س  $\geq$  ٥ ، - س  $\geq$  ١}

أوجد (i) س - ص (ii) ص - س (ii) س - ع (iv) ص - ع

ومثل كلاً منها بأشكال فن

{١ ، ٣} ، {٦ ، ٨} ، {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

(١٢) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} فما نوع كل من العلاقات التالية من حيث

الانعكاس والتماثل والتعدي والتكافؤ:



## المجموعات والاعداد



$$(1) \text{ع} = \{(1, 3), (3, 1), (3, 3)\} \text{ تماثل ، تكافؤ ، تعدي}$$

$$(2) \text{ع} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$(3) \text{ع} = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 1)\}$$

(١٣) اكتب كلاً من المجموعات التالية بطريقة القائمة (ذكر جميع عناصرها):

(i) الأعداد الطبيعية الأقل من العدد ٧

(ii) الأعداد الكلية الأقل من العدد ٧

(iii) الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين الصحيحين - ٧ ، ٧

(iv) الأعداد الطبيعية الأولية الأقل من ١٠

(١٤) اذا كانت  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  ، ص مجموعة أرقام العدد ٠٥٢١٧٣٣٣

ضع أحد الرمزين  $\exists$  ،  $\Phi$  في المربعات التالية لتصبح العبارات صائبة:

$$(i) \quad 1 \square S , \quad 1 \square V$$

$$(ii) \quad 6 \square S , \quad 6 \square V$$

$$(iii) \quad 5 \square S , \quad 5 \square V$$

$$(iv) \quad 7 \square S , \quad 7 \square V$$

(١٥) ضع واحد من الرموز  $> , < , =$  في الدائرة فيما يلي لتصبح كل من

العبارات صواب:

$$(i) \quad 3 - | \bigcirc | 3 - | \quad (ii) \quad | \bigcirc | 3 - |$$

$$(iii) \quad 4 - \bigcirc - 1 \quad (iv) \quad 9 - \bigcirc - \frac{1}{9}$$



(١٦) أجب بنعم أو لا لتصبح العبارة التالية صواب:

(i)  $\{0, 5\} \ni \{0, 5\}$

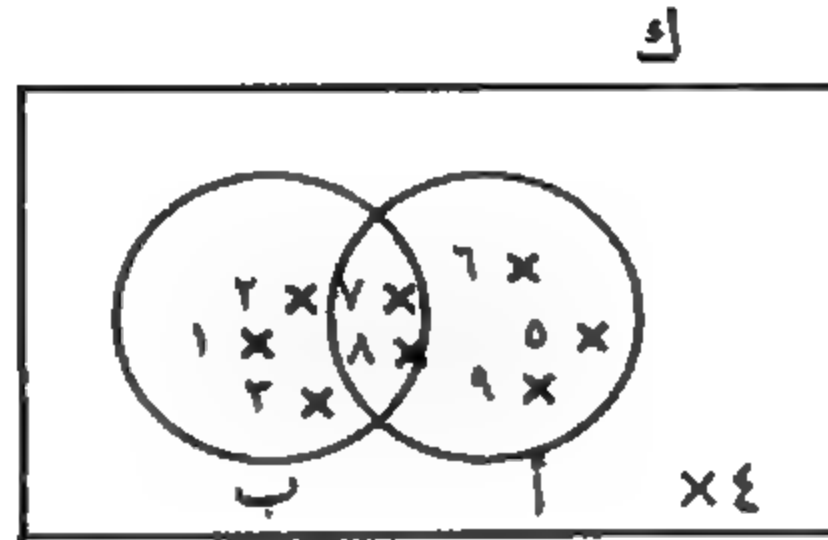
(ii)  $\{2, 4\} \ni 2$

(iii)  $\{2\} \ni \{2\}$

(iv)  $\{2, 3\} \ni 2$

(v)  $\{2\} \ni 2$

(١٧) استعن بمخطط فن التالي:



للإجابة عن الأسئلة التالية:

(i) اكتب المجموعة  $A \cap B$  بذكر جميع عناصرها

(ii) اكتب المجموعة  $A \cup B$  بذكر جميع عناصرها

(iii) اكتب المجموعة  $A - B$  بذكر جميع عناصرها

(١٨) لتكن  $S = \{4, 7, 9\}$  ،  $V = \{5, 6, 12\}$

كون مخططاً سهمياً يمثل علاقة (أكبر من) من المجموعة  $S$  الى المجموعة  $V$

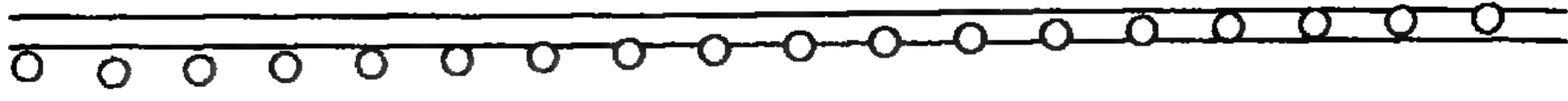
(١٩) اذا كانت  $S$  مجموعة من الأنهار ،  $V$  مجموعة الأقطار ..

$S = \{\text{نهر النيل ، نهر الفرات ، نهر الأردن}\}$

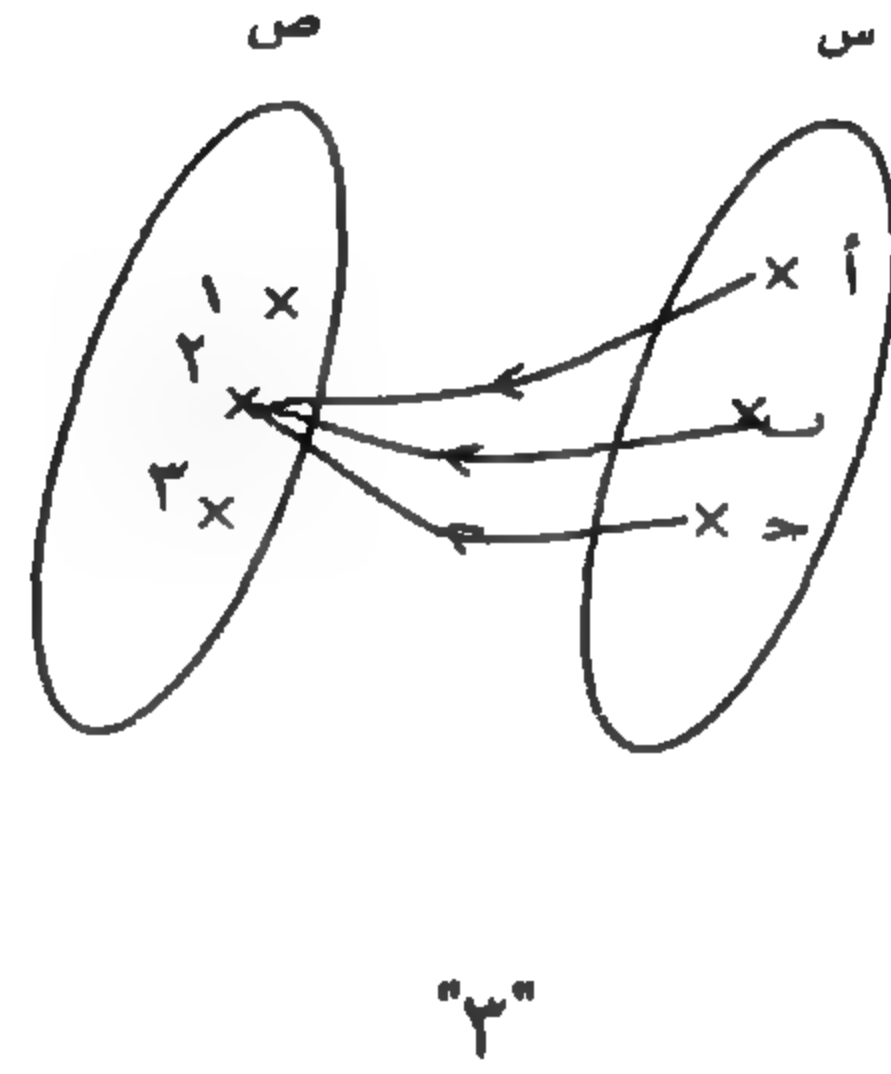
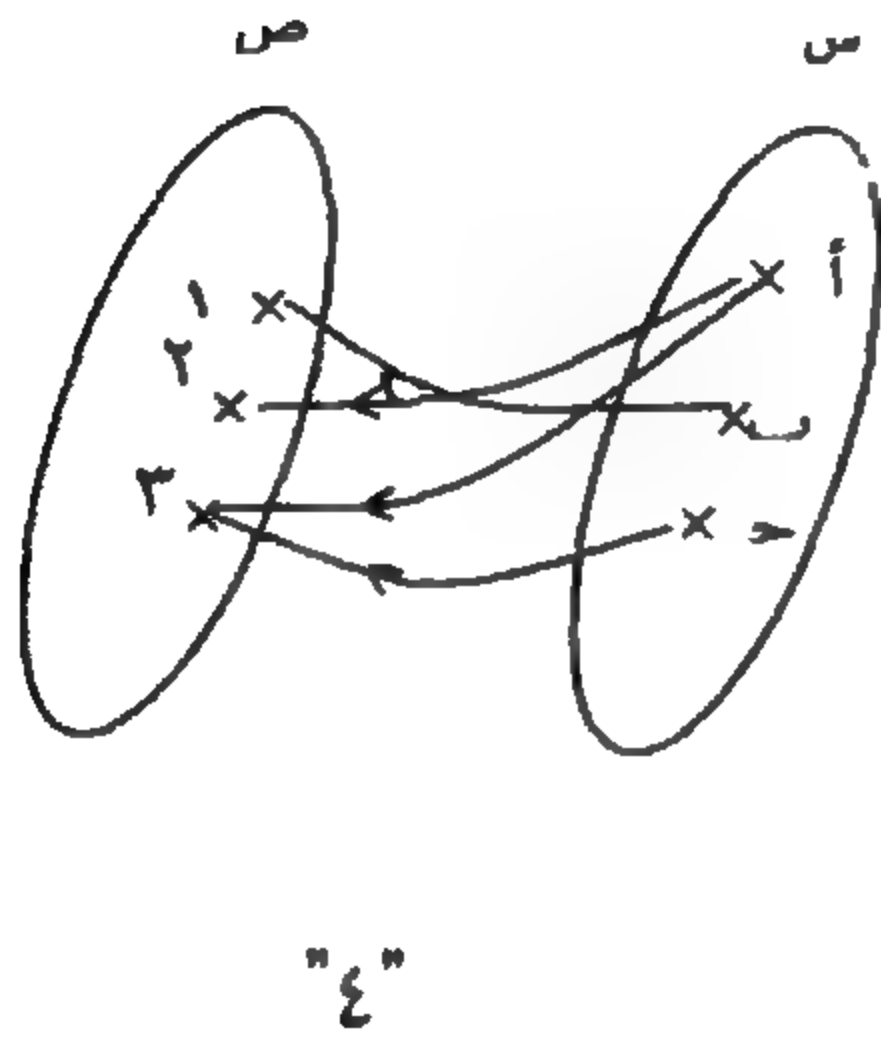
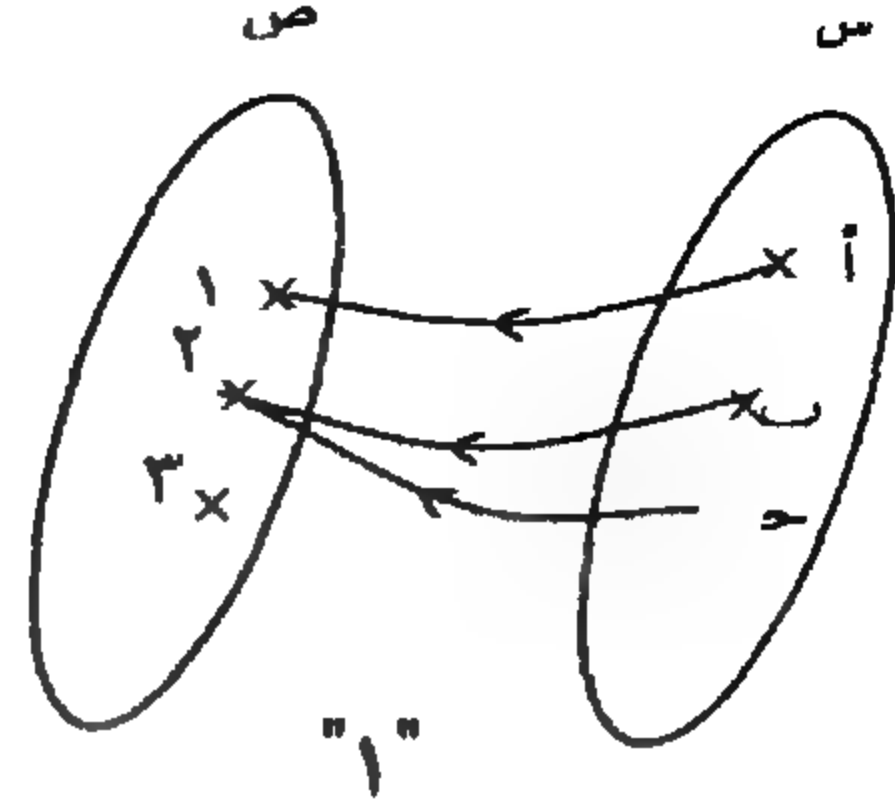
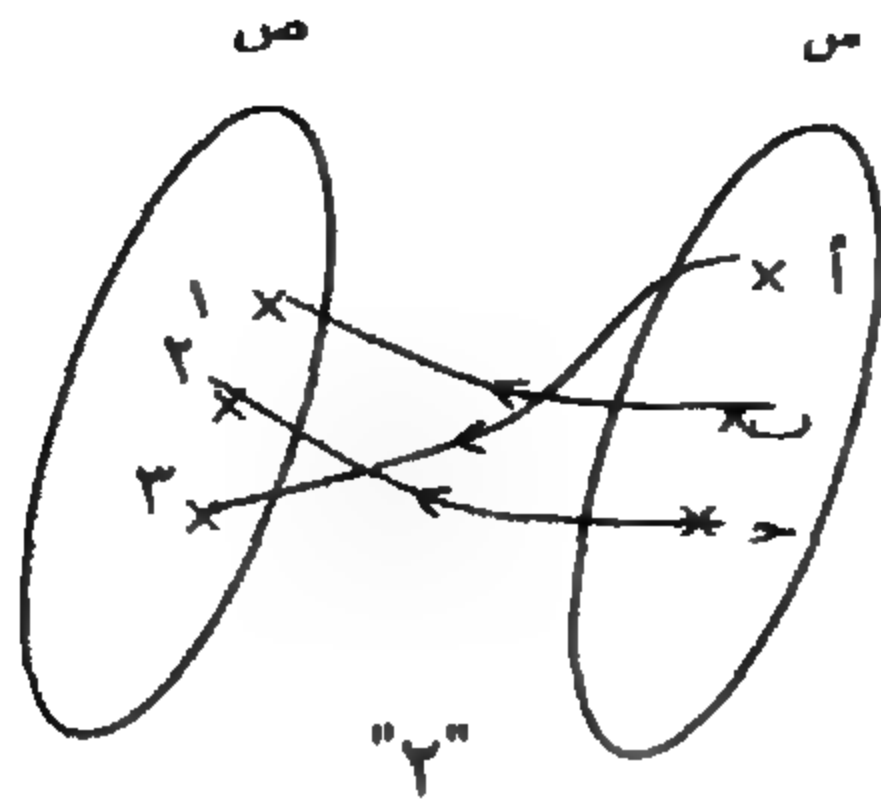
$V = \{\text{العراق ، الأردن ، السودان ، مصر ، سوريا}\}$

كون مخططاً سهمياً يمثل علاقة يوجد في من المجموعة  $S$  الى المجموعة  $V$ .

المجموعات والاعداد



(٢٠) أي المخططات السهمية الآتية يمثل اقتراناً من نوع واحد لواحد:



(٢١) (i) ما قيمة كل من:

$${}^2(0) , {}^2(6) , {}^2(5 -)$$

(ii) اكتب الاعداد التالية بصورة أسية للأساس ٢:

$$٥١٢ , ٦٤$$

(٢٢) حل كلاً من الأعداد الأسية الى عواملها الأولية:

وضع الجواب بصورة أسية:

$$٩٣٥ , ٧٢٩ , ١٤٠٠$$



(٢٣) اذا كانت  $S = \{1, 2, 5, 10\}$  ،  $V = \{1, 3, 5, 15\}$

وكانت  $K = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 20\}$

اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها واستعن بأشكال فن:

$S \cup V$  ،  $S \cap V$  ،  $S - V$  ،  $V - S$  ،  $S \Delta V$

(٢٤) في أحد معاهد اللغات وجد أن من بين ١٥٠ طالباً يدرسون بالمعهد:

٢٥ طالباً يدرسون اللغة الانجليزية

٣٠ طالب يدرسون اللغة الفرنسية

١٥ طالب يدرسون اللغتين الانجليزية والفرنسية

١٠ طلاب يدرسون اللغتين الانجليزية والالمانية

٤٠ طالب يدرسون اللغة الالمانية

٧ طلاب يدرسون اللغتين الالمانية والفرنسية

٤ طلاب يدرسون اللغات الثلاث الانجليزية والفرنسية والالمانية

وضح ذلك بمخطط فن ثم أوجد عدد الطلاب الذين:

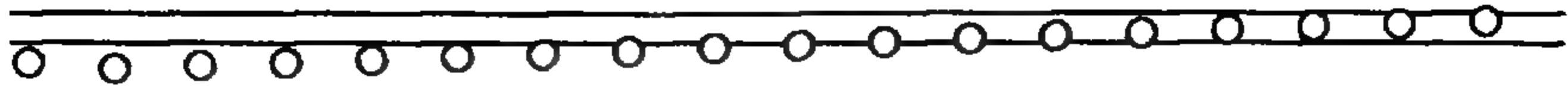
(i) لا يدرسون أي لغة (ii) يدرسون الانجليزية فقط

(iii) يدرسون لغة واحدة فقط (الانجليزية أم الفرنسية أو الألمانية)

(iv) الذين لا يدرسون الفرنسية والالمانية

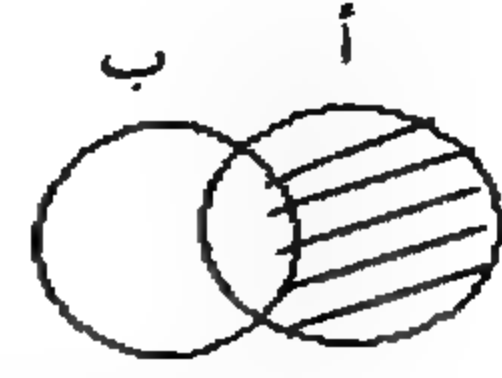
$\{73, 14, 53, 87\}$

## المجموعات والاعداد

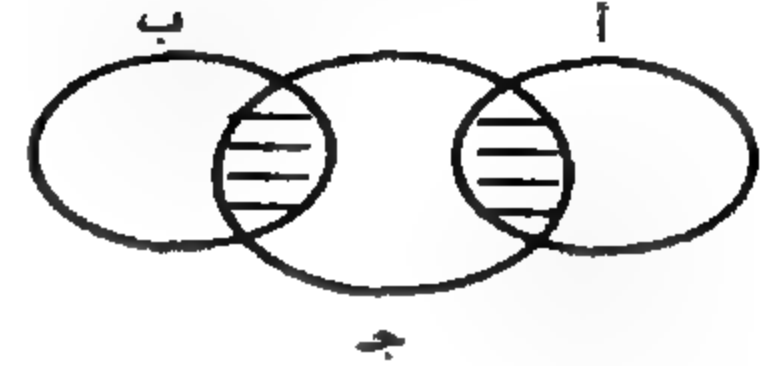


(٢٥) اكتب المجموعات التي تمثلها الأجزاء المظللة بمخططات فن التالية:

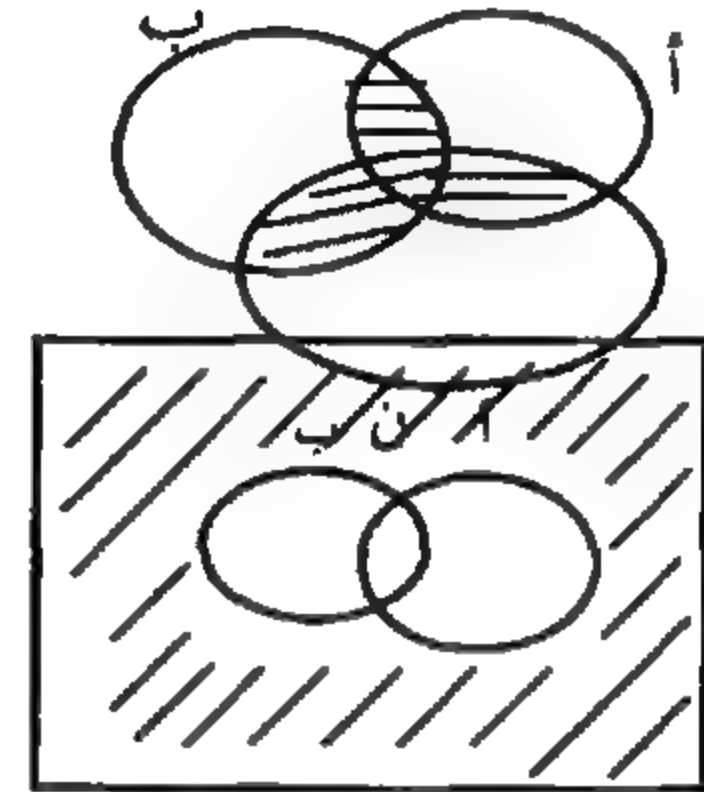
الجزء المظلل يمثل المجموعة:



الأجزاء المظللة تمثل المجموعة:



الأجزاء المظللة تمثل المجموعة:



الأجزاء المظللة تمثل المجموعة:

(٢٦) إذا كان عدد عناصر المجموعة  $S = 5$

وكان عدد عناصر المجموعة  $V = 7$

فما عدد عناصر كل من المجموعات التالية وبالأزواج المرتبة:

$S \times V$  ،  $V \times S$  ،  $S \times S$  ،  $V \times V$

(٢٧) إذا كانت  $S = \{1, 2, 3\}$  فما نوع كل من العلاقات (انعكاس،

تماثل، تعدي، تكافؤ) التالية:

$$E_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

(٢٨) ضع كلاً من الاعداد النسبية التالية في أبسط صورة ممكنة:

$$\frac{87}{60}, \frac{12}{8}, \frac{105}{375}, \frac{48}{60}, \frac{14}{91}, \frac{77}{121}$$

(٢٩) أوجد حاصل ضرب ما يلي:

$$\frac{149}{100} \times \frac{1}{100}$$

## المجموعات والاعداد



$$= (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$$

$$= (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$$

(٣٠) أوجد الناتج فيما يلي مستعيناً بوعاء الاشارات:

$$(1) \quad (5 -) + 5$$

$$(2) \quad (5 -) + (5 -)$$

$$(3) \quad (5 -) - 5$$

$$(4) \quad (5 -) - (5 -)$$

(٣١) صنف كلاً من الفترات التالية الى: مغلق ، نصف مغلقة ، مفتوحة

$$(1) \quad [5, 4 -] \quad (2) \quad (2 - , 1 -)$$

$$(2) \quad (2 - , \infty) \quad (4) \quad \left( \frac{5}{2} , \frac{3}{2} \right]$$

$$(5) \quad (\infty , 0] \quad (6) \quad (7 , 5)$$

$$(7) \quad [1 - , \infty)$$

ارشاد:  $\pm \infty$  لا تؤثران في نوع الفترة وكأنهما غير موجودان.

(٣٢) ضع أحد الرموز  $>$  ،  $<$  ،  $=$  في كل مربع من المربعات التالية لتصبح

العبارات صواب:

$$(1) \quad \frac{7}{17} \square \frac{4}{9}$$

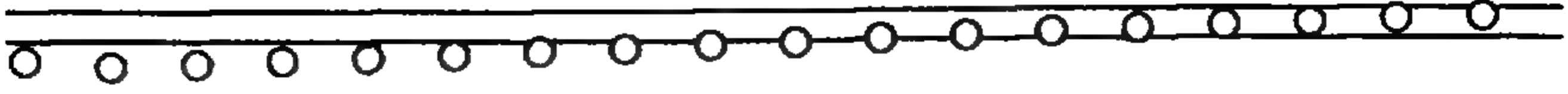
$$(2) \quad 0.142857 - \square \frac{1}{7}$$

$$(3) \quad 9.8 \square \pi \quad \text{حيث } \pi = 3.14$$

(٣٣) ما قيمة كل من:



المجموعات والاعداد



$$-|2|, |2|, -|5|, |5|, -|5|, |5|, -|5|, |5|, -|5|, |5|, -|5|, |5|, -|5|, |5|, -|5|$$

(٣٤) أوجد ع.م.أ ، م.م.أ للأعداد:

$$\{270, 3\}$$

$$45, 2756$$

(٣٥) اذا كان عدد عناصر ك = ٢٩

وكان عدد عناصر أ = ١٥

وعدد عناصر ب = ١٢

وعدد عناصر ( أ ∩ ب ) = ٤

$$\{2\}$$

فما عدد عناصر المجموعة ( أ ∩ ب )

ارشاد: استعن بمخططات فن

(٣٦) ضع احدى الاشارتين < ، > بدلاً من النقط فيما يلي:

$$\frac{1}{3} - \dots \frac{1}{2} - \dots \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{2} - \dots \frac{1}{3}, \frac{1}{8} - \dots \frac{1}{4} - \dots \frac{1}{3}$$

(٣٧) اذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩}

أ = {س : س عدد أولي أقل من ١٠}

ب = {ص : ص عدد زوجي أقل من ١٠}

$$\{2\}$$

اكتب المجموعة أ ∩ ب بذكر جميع عناصرها

(٣٨) اذا كانت ك = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

س = {٣، ٥}

ص = {٢، ٤}





اكتب المجموعة  $(S \cup V) - (S \cap V)$  بذكر جميع عناصرها.

(٣٩) أجب بنعم أو لا:

- (i) مجموع عددين صحيحين زوجيين دائماً عدد زوجي.
  - (ii) مجموع عددين صحيحين فرديين دائماً عدد فردي.
  - (iii) مجموع عددين صحيحين أحدهما فردي والآخر زوجي دائماً عدد فردي.
  - (iv) مجموع أي عدد صحيح مع نفسه دائماً عدد زوجي.
  - (v) الفرق بين أي عددين صحيحين دائماً عدد زوجي.
  - (vi) مربع أي عدد صحيح فردي هو عدد صحيح زوجي.
  - (vii) مربع أي عدد صحيح زوجي هو عدد صحيح زوجي.
- (٤٠) اكتب العدد  $\sqrt{12}$  لأقرب منزلتين عشريتين.

(٤١) إذا كانت  $K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$V = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

عين المجموعة  $(S \Delta V) \cap E$  بذكر جميع عناصرها.

(٤٢) أوجد  $E \cap M$  ،  $M \cap A$  ،  $A \cap L$  للأعداد:

$$A = \{1260, 1350, 9000\}$$

(٤٣) اكتب خمسة عناصر (أزواج مرتبة) تنتمي الى المجموعة التالية:

$$A = \{(S, V) : S - V = K \text{ حيث } K \text{ عدد أولي}\}$$

## المجموعات والاعداد



ارشاد: أكمل المجموعة { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، ... }

(٤٤) ما قيمة  $\frac{\sqrt{5} \sqrt{3-7}}{\sqrt{5} \sqrt{3+7}} + \frac{\sqrt{5} \sqrt{3+7}}{\sqrt{5} \sqrt{3-7}}$  كعدد طبيعي {٤٧}

(٤٥) بسّط ما يلي:

$$\sqrt{48} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{8}$$

(٤٦) انطق المقام فيما يلي:

$$\left\{ \frac{a - \sqrt{b} + \sqrt{a}}{1} \right\} \quad \frac{\sqrt{b}}{a + \sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

(٤٧) حل العدد ٣٦٠٠ الى عوامله الأولية وعبر عنه بصورة أسية.

$$\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix} \right\}$$

(٤٨) اذا كانت ق مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة أ = { ٣ ، ٢ ، ١ }

$$\{\{3, 2, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 1\}, \{2, 1\}, \{3\}, \{2\}, \{1\}, \{\}\} = \text{أي أن ق}$$

فأي من الأنظمة الرياضية التالية (ب . U) ، (ق ، ∩) يشكل زمرة مع التوضيح على شكل جدول؟

(٤٩) اذا كانت أ = { (س ، ص) : ص = س² } فأي من الأزواج المرتبة التالية

$$(-1, 1), (1, 0), (0, 0), (0, 1) \text{ ينتمي الى المجموعة أ}$$

ارشاد: هو زوج مرتب واحد فقط.

(٥٠) حل العدد ٥٥٤٤ الى عوامله الأولية وضع الجواب بصورة أسية

$$\left\{ 11 \times 7 \times \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \times \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$





(٥١) أوجد ع.م.أ. للأعداد ٥٤٠ ، ٢٨٠٨ ، ١٦٦٣٢

{١٠٨}

(٥٢) مثل الأعداد النسبية التالية تمثيلاً عشرياً:

$$\left\{ \frac{13}{150}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \overline{0.486}, \overline{0.83}, \overline{0.285714} \right\}$$

(٥٣) إذا كانت  $S = \{2, 3, 5\}$

$V = \{2, 5, 7\}$

$E = \{4, 5, 7, 11\}$

ما عدد عناصر كل من المجموعات التالية:

$S \cap V$  ،  $V \cup E$  ،  $S - E$  ،  $V \Delta E$

(٥٤) اكتب قاعدة العلاقة  $E = \{(1, 5), (2, 8), (3, 11), (4, 14)\}$

بدلالة  $S$  ،  $V$   $\{V = 3S + 2\}$

(٥٥) انطق المقام (اجعله عدداً نسبياً)

$$\frac{\sqrt{107} - \sqrt{372}}{\sqrt{107} + \sqrt{372}}$$

(٥٦) إذا كانت  $S = \{A, B\}$  ،  $V = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}$

فأين الخطأ وأين الصواب فيما يلي:

(١)  $A \in S$  (٢)  $A \in V$

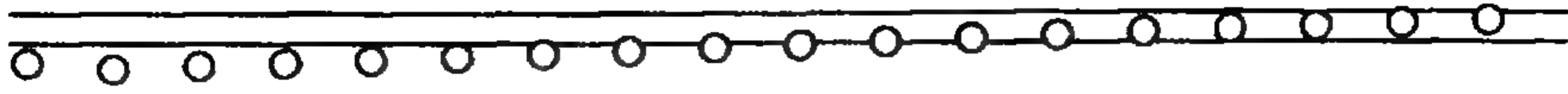
(٣)  $S \supset V$  (٤)  $\{A\} \in S$  (٥)  $\{A\} \in V$

(٥٧) أوجد:

$$(١) \text{ ناتج جمع } \frac{1}{3} + \frac{-2}{5}$$



## المجموعات والاعداد



(٢) باقى طرح  $\frac{1}{3}$  من  $\frac{2-}{5}$

(٣) حاصل ضرب  $(\frac{1}{3}) (\frac{2-}{5})$

(٤) خارج قسمة  $\frac{1}{3}$  على  $(\frac{2-}{5})$

(٥٨) صل بين كل مفردة من مفردات القائمة أ بما يناسبها من مفردات القائمة ب:

القائمة أ	القائمة ب
(١) {٧، ٥، ٣، ٢}	(١) مجموعة عناصر من الاعداد الطبيعية الزوجية
(٢) {٧، ٥، ٣}	(٢) مجموعة أحرف كلمة الحقل
(٣) $\sqrt[3]{64}$	(٣) العدد الطبيعي ٨
(٤) {٨، ٦، ٤، ٢}	(٤) العدد الطبيعي ٤
(٥) {أ، ل، ح، ق}	(٥) مجموعة عناصر من الأعداد الطبيعية الأولية
(٦) $\sqrt[3]{64}$	(٦) مجموعة أرقام العدد ٢٣٢٤٥٥
(٧) {٥، ٤، ٣، ٢}	(٧) مجموعة عناصر الأعداد الطبيعية الفردية

(٥٩) أجب بنعم أو لا:

(٢)  $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3 \times 4}$

(١)  $\sqrt[2]{\frac{5}{3}} = \sqrt[2]{\frac{2}{3} + 1}$

(٤)  $2 \times 3 = \sqrt[4]{4 \times 9}$

(٣)  $\frac{25}{3} = \sqrt[2]{\frac{5}{3}}$

(٥)  $2 + 3 = \sqrt[4]{4 + 9}$

(٦٠) بيّن أن:

(١)  $11 = \frac{\sqrt[3]{363}}{3}$

(٢)  $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{44} - \sqrt[3]{99}$





$$(3) \quad 24 = \overline{17} \overline{68} \overline{17}$$

$$(61) \text{ اذا كانت } \overline{27} = \text{س} , \overline{272} = \text{ص} , \overline{272} = \text{ع}$$

فما قيمة كل من:

$$\text{س ص ع} , \text{س}^2 + \text{ص}^2 + \text{ع}^2 . \{28 , \overline{2712}\}$$

$$(62) \text{ اذا كان عدد عناصر المجموعة س} = 10$$

$$\text{وكان عدد عناصر المجموعة ص} = 8$$

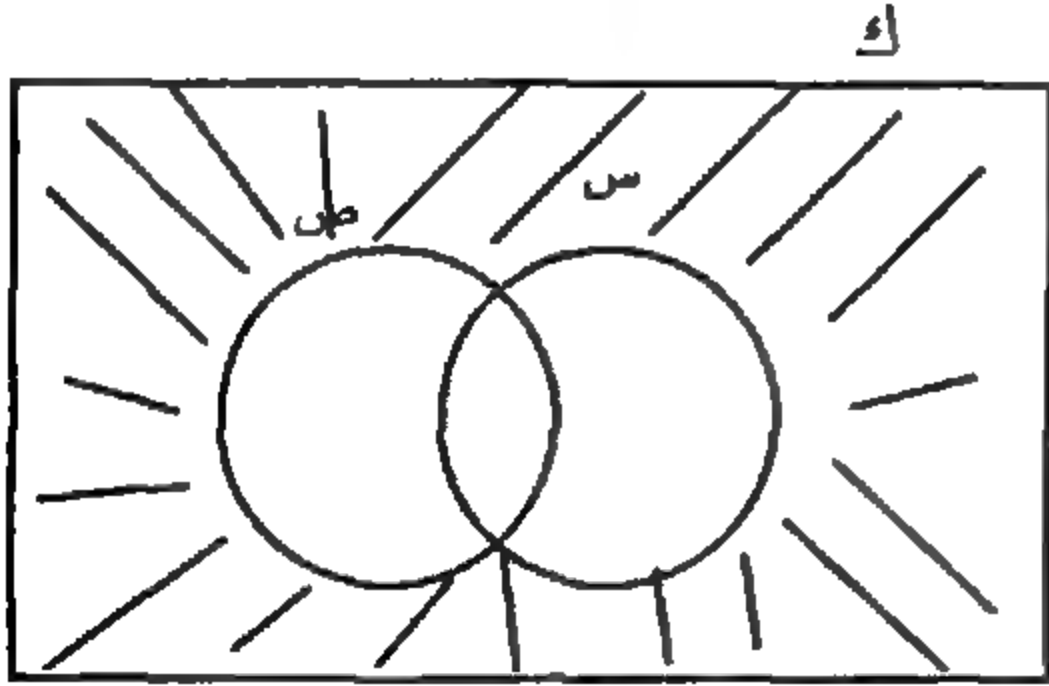
$$\text{وكان عدد عناصر المجموعة س} \cap \text{ص} = 6$$

$$\text{فما عدد عناصر المجموعة س} \cup \text{ص} \quad \{12\}$$

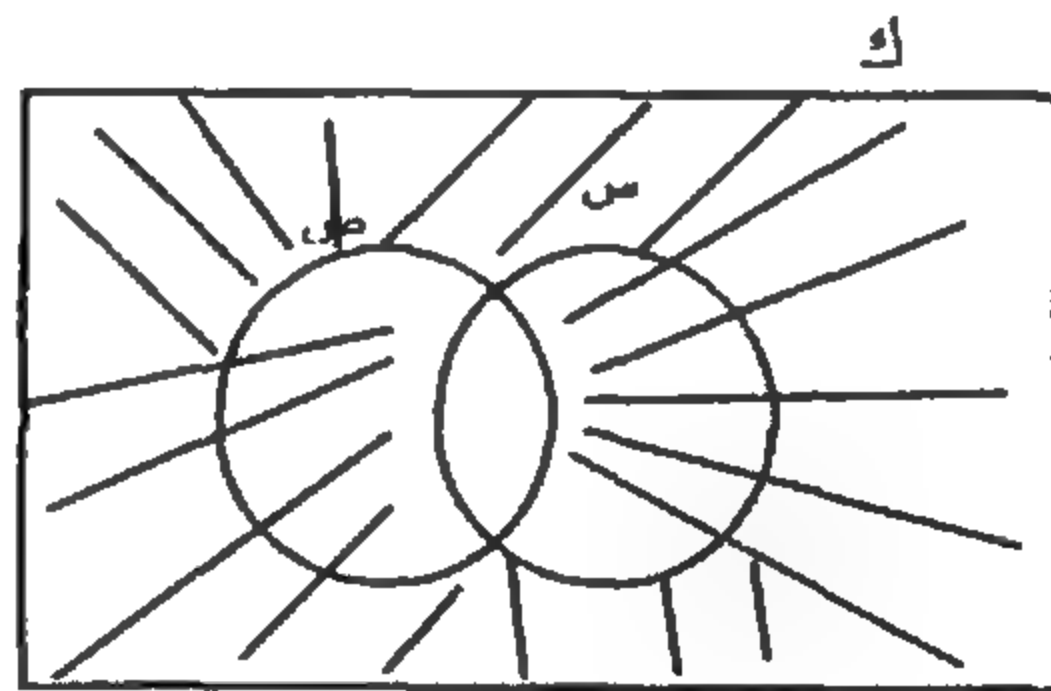
ارشاد: استعن بمخططات فن

$$(63) \text{ اكتب ما يمثله الجزء المظلل في كل شكل من أشكال فن التالية على}$$

شكل مجموعة واحدة:



شكل (2)



شكل (1)

$$(64) \text{ اذا كانت س} = \{1, 2, 2, 4\} , \text{ص} = \{1, 4, 5\}$$

اكتب المجموعة ع بذكر جميع عناصرها:





$$ع = (س \cup ص) - (س \cap ص)$$

$$\{0, 3, 2\}$$

(٦٥) أوجد  $\sqrt{517}$  لأقرب منزلة عشرية واحدة

ارشاد: احصر العدد ٥١٧ بين مربعين متتالين

$$هكذا \quad 529 > 517 > 484$$

(٦٦) أي من العبارات التالية صواب:

$$(1) \quad \{1, 2, 3\} \supset \{1, 2, 3\}$$

$$(2) \quad \{1, 2, 3\} \supset \{3\}$$

$$(3) \quad \{1, 2, 3\} \ni 3$$

$$(4) \quad \{1, 2, 3\} \ni \{2\}$$

$$(5) \quad \{1, 2, 3\} \supset 3$$

(٦٧) أي من العبارتين التاليتين هي الصواب:

$$(1) \quad \{\{2\}\} \supset \{2\}$$

$$(2) \quad \{\{2\}\} \ni \{2\}$$

$$(68) \quad \{0, 1, 2, 3\} = \text{كانت س}$$

$$\text{ص} = \{أ : أ \ni ط, أ > ٤\}$$

$$ع = \text{مجموعة أرقام العدد } 2204$$

$$\text{هل س} = \text{ص} \quad (\text{أم}) \quad \text{س} = \text{ع} \quad ؟$$

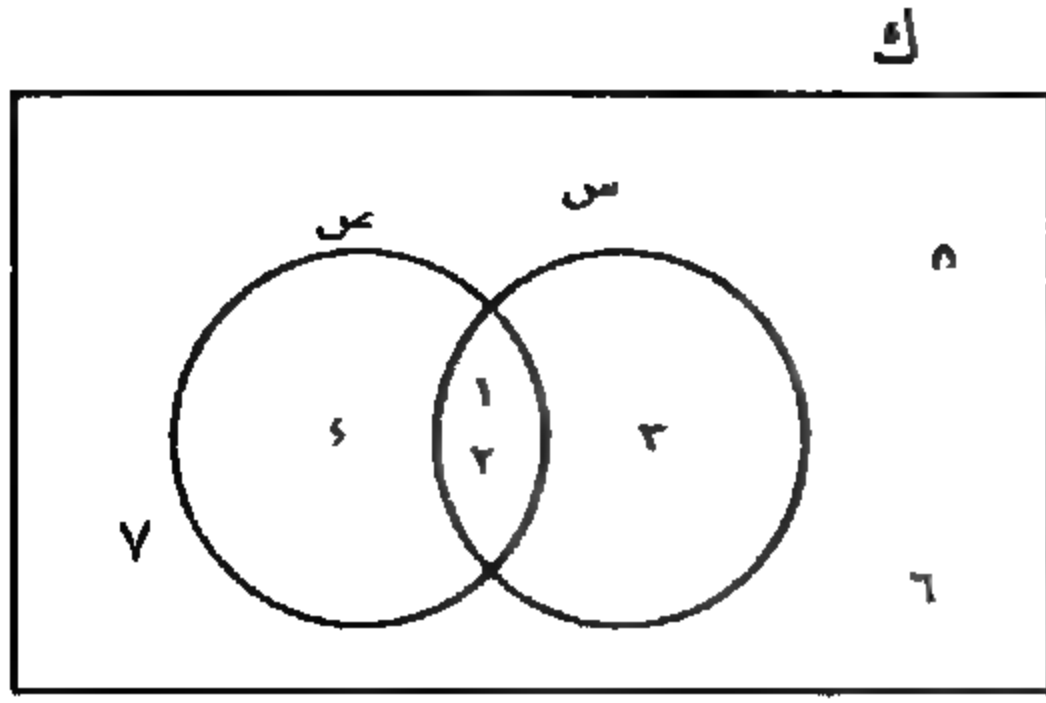




(٦٩) ترجم مخطط فن التالي الى

المجموعات التالية بذكر

جميع عناصرها:



(١) س - ص

(٢) ص - س

(٣) س  $\Delta$  ص

(٤) (س  $\cup$  ص)

(٥) (س  $\cap$  ص)

(٧٠) اذا كانت س = {٠ ، ١ ، ٣ ، ٧} ، ص = {ج ، د ، هـ} فاملاً كل فراغ

فيما يلي بما يناسبه، وبواحد من الرمزین  $\exists$  ،  $\nexists$  لتصبح العبارات التالية

صواب:

(١) (٧ ، هـ) س  $\times$  ص ، (٢) (٧ ، هـ) ص  $\times$  س

(٣) (٠ ، د) س  $\times$  ص ، (٤) (ج ، ٠) ص  $\times$  س

(٥) (ج ، د) س  $\times$  س ، (٦) (١ ، ٣) ص  $\times$  ص

(٧) (١ ، ٠) س  $\times$  ص

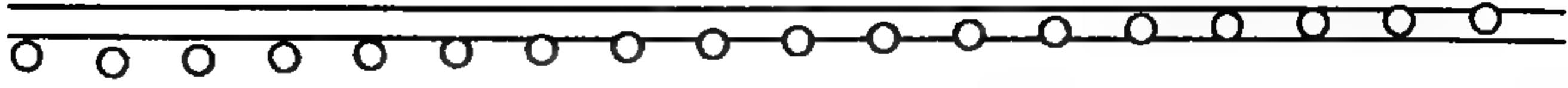
(٧١) اختصر لأبسط صورة:

$$\left\{ \frac{\sqrt{27} - 10}{3} \right\} \quad \frac{\sqrt{27} - \sqrt{5}}{\sqrt{27} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{27} + \sqrt{5}}$$

ارشاد: استعن بانطاق المقام



المجموعات والاعداد



(٧٢) اختصر لأبسط صورة:

$$\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{48}} \div \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{27}}$$

$$\left\{ \frac{14}{3} \right\}$$

(٧٣) ما قيمة:  $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  باعتبار  $\sqrt{5} = 2.24$

$$\{ 141 \}$$

ارشاد: انطق المقام أولاً

(٧٤) أوجد  $\sqrt[3]{128}$  لأقرب منزلة عشرية واحدة.

ارشاد: احصر العدد ١٢٨ بين مكعبين متتالين أي:

$$216 > 128 > 125$$

(٧٥) اختصر لأبسط صورة:

$$\sqrt{48} + \sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{8}$$

(٧٦) اكتب ثلاثة أعداد نسبية كلاً منها يكافئ العدد النسبي  $\frac{2}{9}$

(٧٧) اكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها:

(١) أ = {س : س بلد عربي يقع في قارة آسيا}

(٢) ب = {س : س بلد عربي يقع في قارة أوروبا}

(٣) ج = {س : س بلد عربي يقع في قارة افريقيا}

(٧٨) اذا كانت س = {١ ، ٢ ، ٣} وكانت مجموعة المجموعات الجزئية لها

(مجموعة القوة)



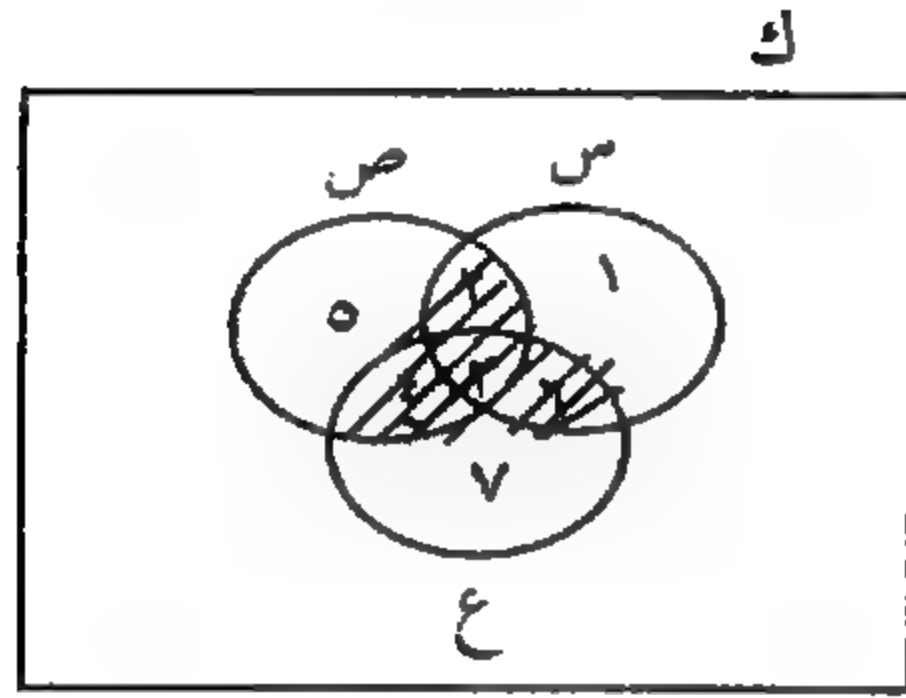
$$\{ \{3, 2, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{2, 1\}, \{3\}, \{2\}, \{1, 1\}, \emptyset \} = Q$$

فلماذا هذه العبارات خاطئة؟ ثم صححها.

(١)  $S \supset Q$

(٢)  $1 \in Q$

(٣)  $\{2\} \supset Q$



(٧٩) عبّر عن المنطقة المظللة بمخطط فن

التالي مستخدماً المجموعات:

س ، ص ، ع

وعمليات  $\cap$  ،  $\cup$  فقط

$\{0.05\bar{9}\}$

(٨٠) مثل العدد النسبي  $\frac{1}{17}$  تمثيلاً عشرياً

(٨١) اكتب قاعدة العلاقة التي تربط بين المتغيرين س ، ص مستعيناً بالجدار

للتالية:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٤	٩	١٦	٢٥

$\{ص = س^2\}$

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٢	٥	١٠	١٧	٢٦

$\{ص = س^2 + ١\}$

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١	٣	٥	٧	٩

$\{ص = س^2 - ١\}$

ارشاد: اعتمد طريقة التجربة والخطأ في ايجاد القاعدة.

## المجموعات والاعداد



(٨٢) مثل الاعداد النسبية التالية تمثيلاً عشرياً:

$$\frac{13}{9}, \frac{5}{6}, \frac{25}{4}$$

$$\{1.\overline{4}, 0.\overline{83}, 6.25\}$$

(٨٣) صنّف الأعداد التالية الى أعداد نسبية وأعداد غير نسبية:

$$\sqrt{5}, 0.\overline{16}, 3.7, \{\text{نعم}, \text{نعم}, \text{لا}\}$$

(٨٤) أيّ من الأعداد الحقيقية التالية ينتمي الى الفترة  $(-\infty, 5)$  ،

$$-7, -5, 2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, \frac{1}{2}, \text{صفر}$$

(٨٥) عبّر عن كل من الأعداد العشرية التالية بالصورة النسبية  $\frac{a}{b}$

$$1.1, 0.\overline{7}, 0.09$$

(٨٦) اذا علمت أن  $3 = \sqrt{1.732}$  فما قيمة  $\sqrt{3}$  لأقرب ثلاث منازل عشرية؟

(٨٧) اذا علمت أن  $0.\overline{3} = \frac{1}{3}$  { وتحقق من ذلك بالقسمة الطويلة }

$$1 = 0.\overline{9} \quad \text{فبين أن}$$

(٨٨) ما قيمة ما يلي بأبسط صور ممكنة:

$$(1) \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} + \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \quad (2) \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} - \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$$

$$(3) \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \times \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \quad (4) \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}} \div \frac{\frac{5}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}}{\frac{5}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}}$$



(٨٩) فصل دراسي عدد طلابه ٤٥ ، منهم ٢٠ يدرسون اللغة الانجليزية على الأقل ،  
ومنهم ٢٥ يدرسون اللغة الالمانية على الأقل ، وعدد الذين يدرسون لغة واحدة  
على الأقل ٣٨ طالب.

ما عدد الطلاب الذين لا يدرسون الانجليزية ولا الالمانية؟ { ٧ }

ارشاد: استعن بمخططات فن ، عدد الذين يدرسون اللغتين معاً = ٤٥ - ٣٣٨ = ٧

(٩٠) اذا كانت ك = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٠٠٠ ، ٢٩ }

وكانت المجموعات س ، ص ، ع مجموعات جزئية من المجموعة ك

وكانت س = { أ : أ مضاعفات العدد ٣ }

ص = { ب : ب مضاعفات العدد ٥ }

ع = { ج : ج مضاعفات العدد ٧ }

اكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها:

س ∩ ص ، س - ع ، ص ∪ ع .

(٩١) اذا كان أ عدد حقيقي غير سالب وكذلك ب ،

فإن  $أ + ب \geq (أ + ب)$  ؟

والسؤال: وضّح بمثال متى يكون  $أ + ب = (أ + ب)$  ؟

(٩٢) اكتب الأعداد الحقيقية التالية بأبسط صورة ممكنة:

$$\frac{١٠٥-}{٣٧٥-} ، \frac{٤٥}{٧٥-} ، \frac{٣٩-}{٦٥} ، \frac{١١٧}{٢٦٠}$$

$$\left\{ \frac{٧}{٢٥} ، \frac{٣}{٥} - ، \frac{٣}{٥} - ، \frac{٩}{٢٠} \right\}$$

(٩٣) أي من المجموعات التالية خالية؟





$$أ = \{س : س \text{ عدد صحيح أقل من } ١\}$$

$$ب = \{ص : ص \text{ عدد طبيعي أقل من } ١\}$$

$$ج = \{ع : ع \text{ عدد نسبي أقل من } ١\}$$

$$د = \{ل : ل \text{ عدد حقيقي أقل من } ١\}$$

(٩٤) بيّن المسقط الخطأ والمسقط الصواب في كل زوج من الأزواج المرتبة التالية:

$$(١) \quad \{١\} \supset \{١\} \quad , \quad \{١\} \ni \{١\}$$

$$(٢) \quad \{٢\} \supset \phi \quad , \quad \{٢\} \ni \phi$$

$$(٣) \quad (\{١\}) \supset \{١\} \quad , \quad (\{١\}) \ni \{١\}$$

(٩٥) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها:

$$س = \{أ : أ \text{ عامل من عوامل العدد } ٢٤\}$$

$$ص = \{ب : ب \text{ عامل من عوامل العدد } ١٨\}$$

$$ع = \{ج : ج \text{ عامل من العوامل المشتركة للعددين } ١٨ , ٢٤\}$$

$$(٩٦) \text{ اذا كانت } س = \{١, ٢, ٣, ٤, ٥, ٦\} \quad س \cap ص = \{٨\}$$

$$ص = \{٣, ٤, ٥, ٦, ٧\}$$

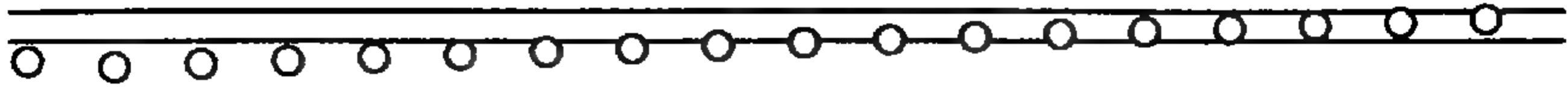
مثل بمخططات فن المجموعات التالية ولكن كل على انفراد:

$$(١) \quad س - ص \quad (٢) \quad ص - س \quad (٣) \quad س \Delta ص$$

$$(٩٧) \text{ اذا علمت أن } ك = \text{المجموعة الكلية} , \quad \phi = \text{المجموعة الخالية: } س \supset ك$$

أعط مثلاً واحداً فقط لبيان أن:

$$(١) \quad س - س = \phi \quad (٢) \quad س - \phi = س$$



$$(4) S \cap S = S$$

$$(3) S \cup S = S$$

$$(5) S - K = \phi$$

$$(5) \phi - S = \phi$$

$$(7) K - \phi = K$$

(98) اذا كانت ك = مجموعة من الأشخاص

$S = \{S : S \text{ شخص عربي}\}$

$V = \{V : V \text{ شخص مدمن على شرب الشاي}\}$

$E = \{E : E \text{ شخص مفرم بأكل المناسف}\}$

(99) حيث  $S, V, E \supset K$

عبّر عن كل من المجموعات التالية بجملة لغوية صحيحة:

(1)  $S \cap E$  : شخص عربي مفرم بأكل المناسف ← مثال

(2)  $S \cap V$  :

(3)  $S \cap V$  :

(4)  $S \cap V$  :

(5)  $S \cap V$  :

(6)  $S \cap E$  :

(100) اكتب الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول أحد الأعداد:

$\{-1, 0, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\}$  ومسقطها الثاني العدد 4.



واكتب الأزواج المرتبة التي مسقطها الأول كلمة "كرة" ومسقطها الثاني أحد العناصر {طائرة ، السلة ، القدم ، اليد}

(١٠١) اكتب المجموعات التالية بذكر جميع عناصرها:

(١) مجموعة الاتجاهات الأربعة الأصلية.

(٢) مجموعة شهور السنة الميلادية.

(٣) مجموعة ألوان الطيف السبعة.

(٤) مجموعة الحواس الخمس في الانسان.

(٥) مجموعة قارات العالم الست.

(١٠٢) أجب بالنفي (لا) أو الاثبات (نعم) عن كل من العبارات:

(١) شهر آذار  $\exists$  س حيث س مجموعة شهور السنة الهجرية.

(٢) يوم الخميس  $\exists$  ص حيث ص مجموعة أيام الأسبوع.

(٣) المتر  $\exists$  ع حيث ع مجموعة مقاييس للأطوال.

(٤) الغرام  $\exists$  ل حيث ل مجموعة مقاييس للأوزان.

(١٠٣) اذا كان  $a = 4$  ،  $b = 3$  ،  $c = 7$  فما القيمة العددية لـ:

$a + b + c$  ،  $a - b - c$  ،  $a \cdot b$  ،  $b \cdot c$  ،  $a (b - c)$

(١٠٤) احصر كلاً من الأعداد الحقيقية التالية بين مربعين متتالين:

١٢ ، ٤٥ ، ١٠٧ ، ٤١٦

(١٠٥) أوجد: ناتج جمع - ١٧ + ١٤

ناتج طرح - ١٧ من ١٤





حاصل ضرب (- ١٧) (١٤)

خارج قسمة (- ١٧) ÷ (١٤)

(١٠٦) تُريد شركة فياض ايصال المياه لمنازل ثلاثة من المشتركين في مناطق

مختلفة، فإذا كانت منازلهم تبعد عن مصدر المياه الرئيسي بالأمتار:

٢٧٥ ، ١٥٠ ، ٢١٠

فما أطول ماسورة تستخدمها الشركة بحيث يلزم منها عدد صحيح لا يصل

المياه للمنازل الثلاثة المذكورة؟

ارشاد: استعن بالعامل المشترك الأعظم ع . م . أ

(١٠٧) أٌحصر الأعداد الحقيقية التالية بين مكعبين متتالين:

٢٩ ، ١٥ ، ٧

(١٠٨) أوجد قيمة  $\sqrt[3]{117}$  لأقرب منزلة عشرية واحدة.

(١٠٩) رتّب الأعداد الحقيقية التالية ترتيباً تنازلياً:

$\frac{2-}{7}$  ، صفر ،  $\frac{8}{7}$  ،  $\frac{9-}{7}$  ، - ١ ، ١

(١١٠) إذا كانت س = - ٢ ، ص = ٥ فما قيمة كل من الأعداد التالية بأبسط

صورة:

$$\frac{10س}{3ص} ، \frac{س}{3} + \frac{ص}{5} ، \frac{1}{2س} - \frac{1}{3ص}$$

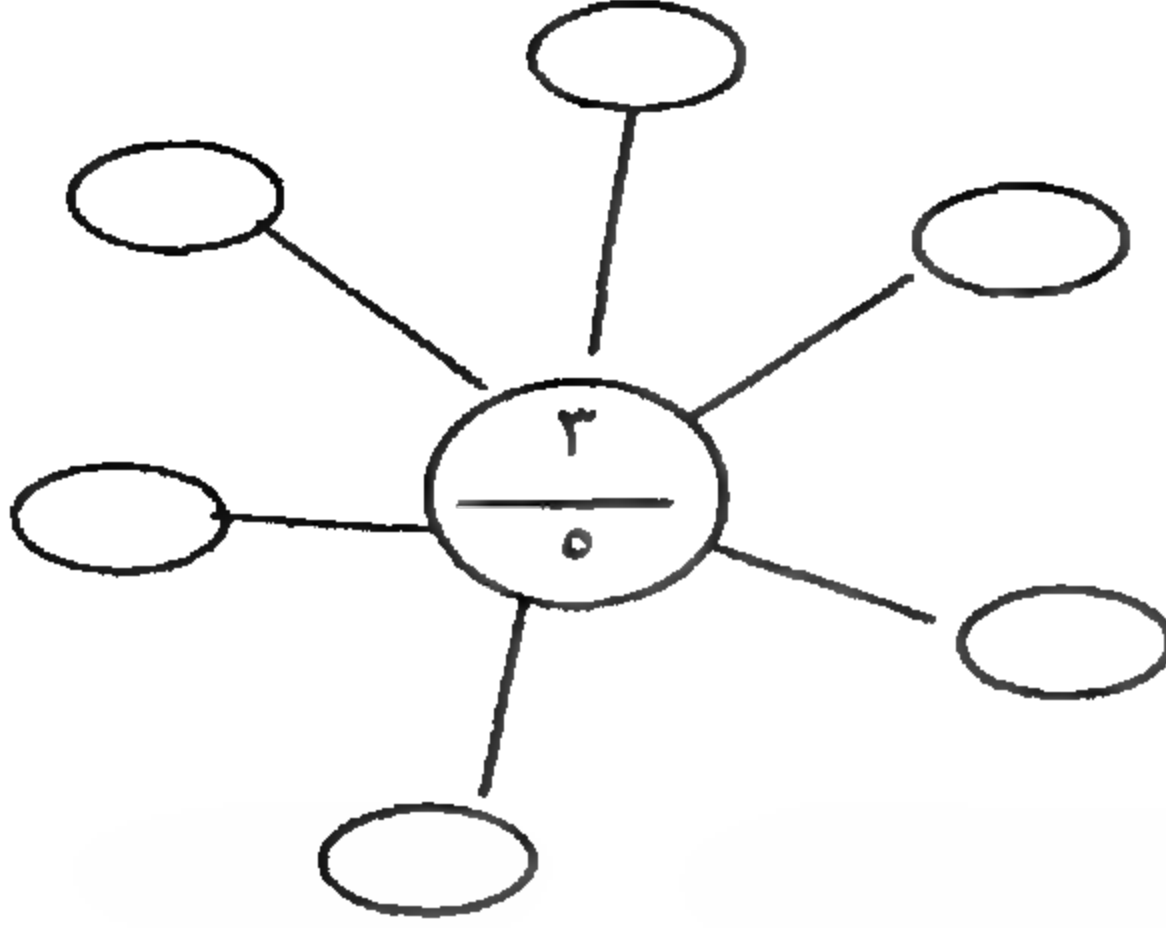
## المجموعات والاعداد



(١١١) املأ الدوائر في الشكل المجاور بواحد

من الأعداد الحقيقية التالية:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{21}, \frac{10}{3}, 5, \frac{1}{3}, 7$$



بحيث يكون حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد

على استقامة واحدة يساوي "١"

{لا تكرر العدد أكثر من مرة فقط}

(١١٢) اذا كانت درجة الحرارة في مدينة عجلون في يوم من أيام فصل الشتاء لعام

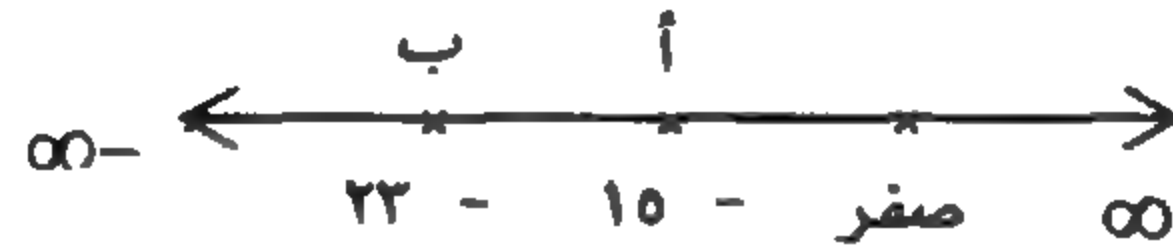
١٩٩٠م ٧ درجات سلسيوسية، ثم بدأت بالانخفاض التدريجي بمعدل ٣

درجات يومياً، فما هي درجة الحرارة بعد ثلاثة أيام من ذلك اليوم المذكور؟

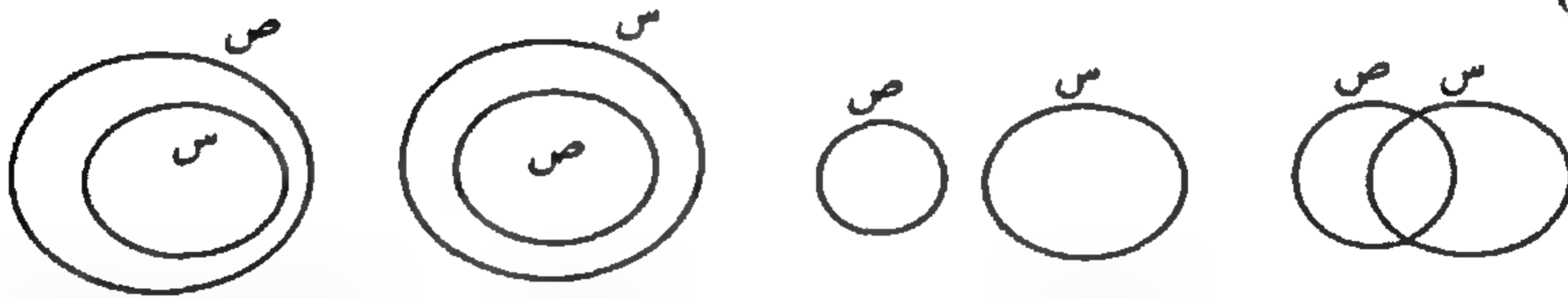
$$\{-2\}$$

(١١٣) كم وحدة تبعد النقطة أ التي تمثل العدد - ١٥ عن النقطة ب التي تمثل

العدد - ٢٣ على خط الأعداد كما في الشكل؟



(١١٤)



في كل من مخططات فن التالية للمجموعات ظلل المنطقة التي تمثل

المجموعة ص - س .

(١١٥) أوجد قيمة:

$$\{0.2\}$$

$$(1) \sqrt{0.000064}$$

ارشاد: ابدأ بالجذر الداخلي





$$\left\{ \frac{2}{5} \right\} \quad \sqrt[3]{\frac{81}{225}} \quad (2)$$

$$\left\{ \frac{2}{5} \right\} \quad \sqrt[3]{\frac{27}{125}} \quad (3)$$

(١١٦) أعط أمثلة تبين فيها أن:

$$\sqrt{s} + \sqrt{v} \neq \sqrt{s+v}$$

$$\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{v} \neq \sqrt[3]{s+v}$$

لكل  $s, v$  أعداد حقيقية موجبة.

(١١٧) جد ناتج:

$$\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}$$

(١١٨) ارتفاع قمة عمارة  $\frac{1}{4}$  متراً عن مستوى سطح الشارع العام، وعمق

بئر الماء أسفل العمارة ينخفض  $\frac{1}{3}$  متراً عن سطح الشارع العام، ما الفرق

بين ارتفاع قمة العمارة وقعر البئر؟

ارشاد: انتبه للإشارات + ، - هنا بالذات

(١١٩) بلغت درجة الحرارة العظمى في يوم ما في المرتفعات الجبلية في الأردن

نهاراً  $4.3^\circ$  س وبلغت درجة الحرارة الدنيا ليلاً في اليوم نفسه  $6.8^\circ$  س تحت

الصفر، أوجد الفرق بين درجتي الحرارة نهاراً وليلاً (يسمى هذا الفرق

المدى الحراري)



## المجموعات والاعداد



(١٢٠) باعتبار الصفر هو العنصر المحايد لعملية جمع الأعداد الحقيقية،  
والواحد الصحيح هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد الحقيقية،  
أوجد النظير الجمعي (سالب العدد) والنظير الضربي (مقلوب العدد)  
للأعداد التالية:

$$\frac{2}{5}, 3, -\frac{4}{7}, \text{ صفر } 0, 1 \text{ وتحقق من صحة الحل!}$$

(١٢١) ما طول كل من الفترات التالية:

$$(-6, -2], [-6, -2), (-6, -2], [7, 4], (7, 4]$$

(١٢٢) ما قيمة كل من:

$$-\frac{3}{9} \times \frac{3}{9}, \frac{5}{8} + \frac{1}{5}, \frac{1}{2} - \frac{4}{5}, \frac{1}{6} \div \frac{3}{4}$$

(١٢٣) إذا كان  $\sqrt{11} = 3.3$  (وهذا معلوم)

فأي من العبارات التالية هي الصواب:

$$3.3 < \sqrt{11}, 3.3 > \sqrt{11}, 3.3 = \sqrt{11}$$

ارشاد: أوجد  $\sqrt{3.3}$  أولاً

(١٢٤) إذا كان  $a > b$ ، حيث  $a, b$  أعداد حقيقية موجبة، أعط أمثلة توضح

فيه أن:

$$\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

ارشاد: افرض  $b = 25$ ،  $a = 9$  على سبيل المثال





(١٢٥) اذا كان  $a = b^2$

فأي من العبارتين هي الصواب:

الأولى:  $a \leq 0$

الثانية:  $b \leq 0$

(١٢٦) اكتب العدد  $\sqrt{10}$  لأقرب منزلة عشرية واحدة.

ارشاد: احصره بين مربعين متتالين.

(١٢٧) اذا كان  $s + 10 = 6(s + t)$  لكل  $s, t$  أعداد حقيقية

بيّن أن  $s + 10 = 5(s + t)$

ارشاد: أوجد  $s$  بدلالة  $t$  أو العكس.

(١٢٨) اكتب العددين الحقيقيين التاليين بالصورة العلمية:

$89000$  ،  $0.000735$

(١٢٩) اذا كان عدد عناصر المجموعة الكلية  $K = 22$

وعدد عناصر المجموعة  $S = 10$

وعدد عناصر المجموعة  $T = 11$

وعدد عناصر المجموعة  $S \cap T = 4$

أوجد عدد عناصر المجموعة  $(S \cup T)^c$

$\{5\}$

ارشاد: استعن بمخططان فن.



## المجموعات والاعداد



(١٣٠) أيّ من الأعداد النسبية التالية:

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{10}$$

يمكن تمثيله عشرياً بكسر دوري؟

(١٣١) إذا كان أ ، ب عدداً صحيحان موجبان غير متساويين، فأى من

العلاقات التالية هي الصواب:

$$(1) \quad 2^a + 2^b > 2^{a+b}$$

$$(2) \quad 2^a + 2^b = 2^{a+b}$$

$$(3) \quad 2^a + 2^b < 2^{a+b}$$

بيّن بأمثلة عددية.

(١٣٢) صنّف الأعداد الحقيقية التالية الى أعداد نسبية أو غير نسبية:

$$\sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}$$

$$-\sqrt{5}, 0.5, 0.\overline{5}$$

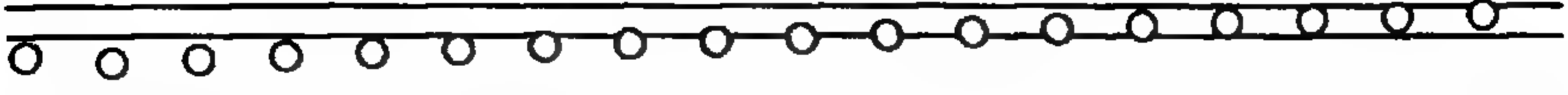
(١٣٣) تنظم شركة سياحية رحلات من احدى المدن {بيروت، القاهرة، عمان}

الى واحدة من المدن التالية {لندن ، باريس، روما}.

اكتب مجموعة هذه الرحلات على شكل أزواج مرتبة مستعيناً بحاصل

الضرب الديكارتي.





(١٣٤) اكتب زوايا المثلث أ ب ج على شكل ثلاثيات مرتبة، في كل حالة من

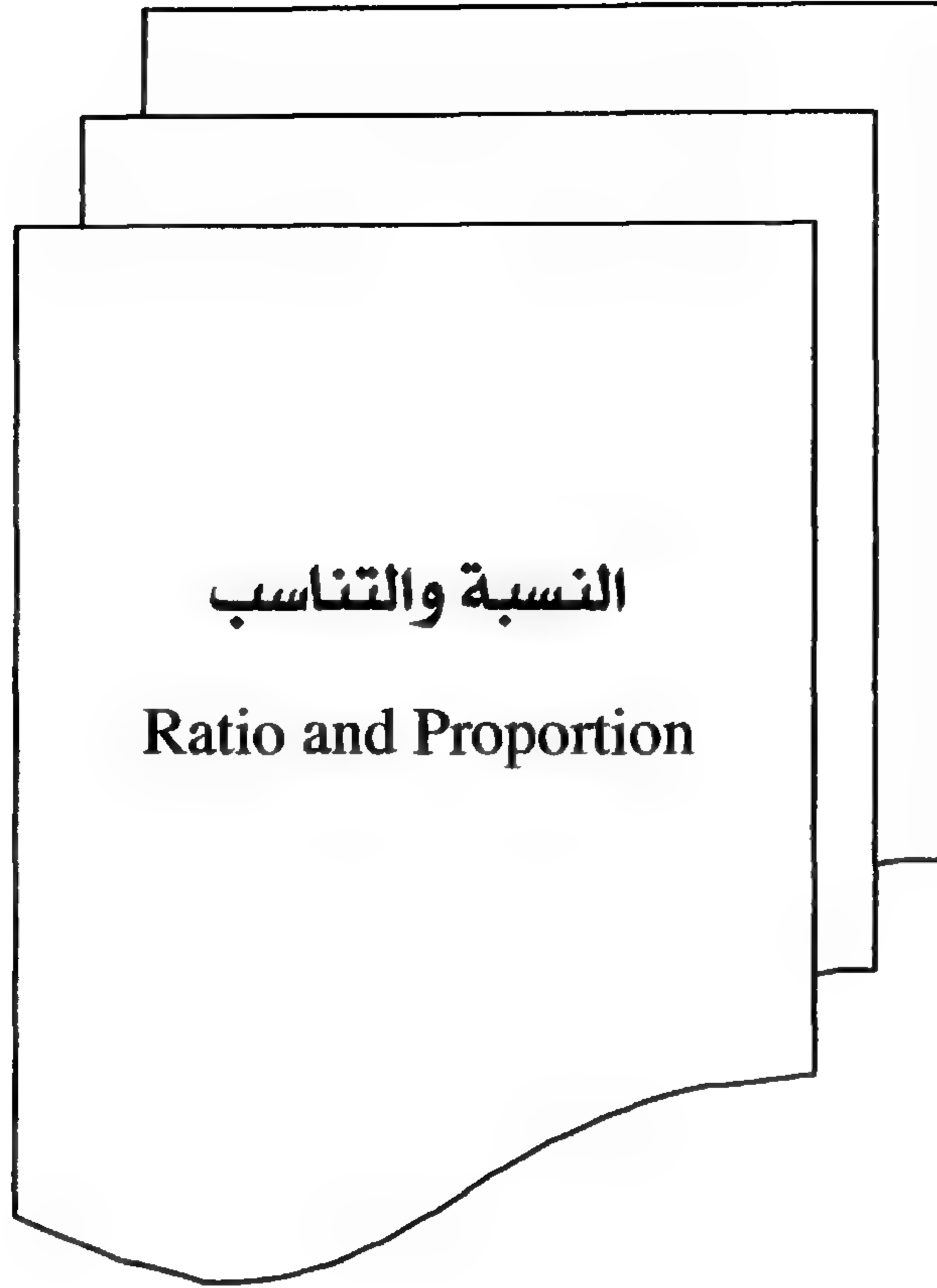
الحالات:

$$(١) \quad \angle A = 40^\circ, \quad \angle B = 60^\circ, \quad \angle C = 80^\circ$$

$$(٢) \quad \angle A = \angle C = 40^\circ, \quad \angle B = 50^\circ$$

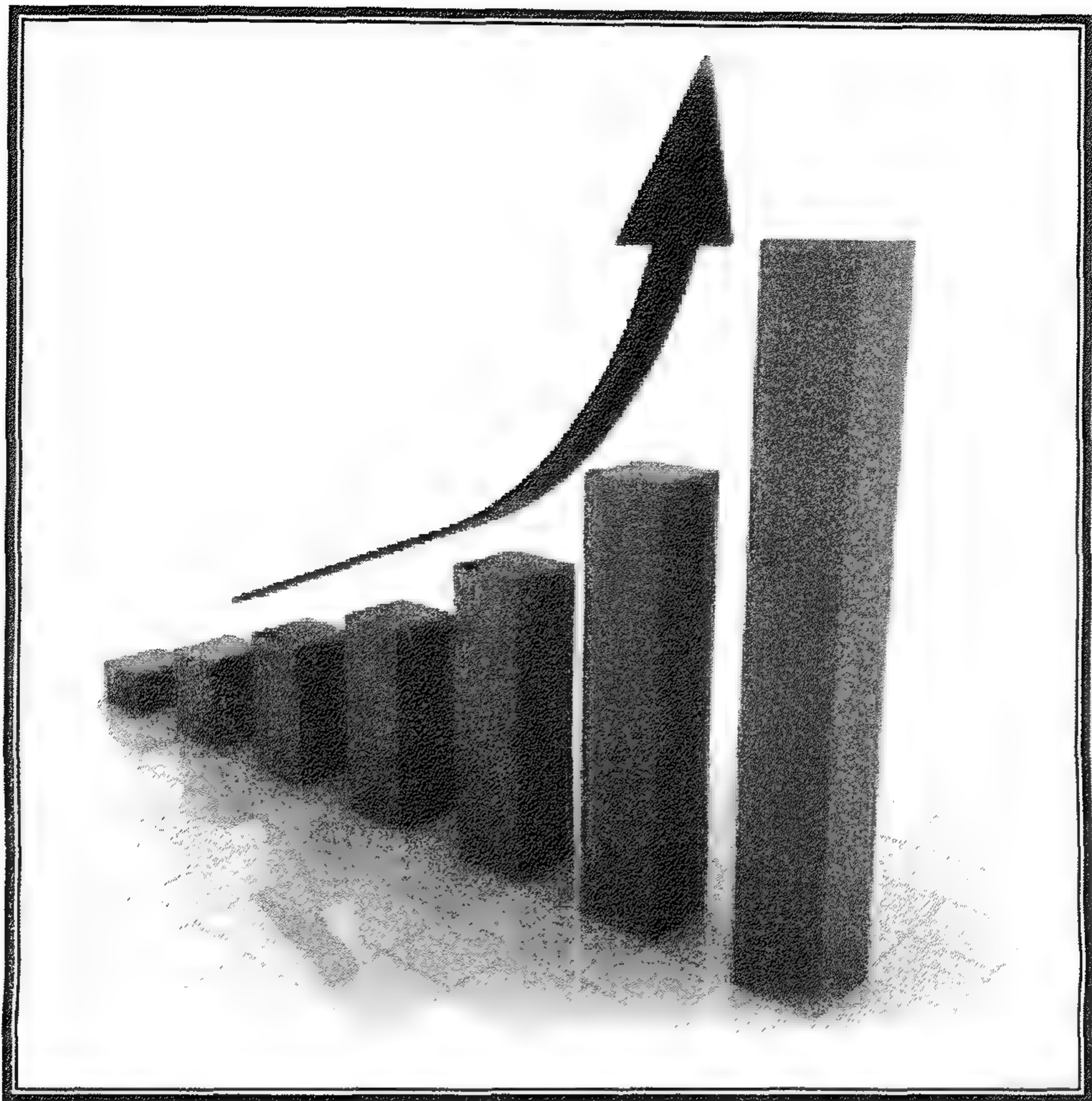
$$(٣) \quad \angle A = \angle B = 70^\circ, \quad \angle C = 90^\circ$$





النسبة والتناسب

Ratio and Proportion



۱۷۴



## النسبة والتناسب



(٢- ١) النسبة Ratio:

تعني النسبة المقارنة بين عددين حقيقيين وما ينتج من خارج قسمة العدد الأول على العدد الثاني وبالترتيب:

فالنسبة بين العددين الحقيقيين أ و ب هي  $\frac{أ}{ب} = أ : ب$  (حيث تُقرأ أ الى ب)

فالعُددان أ ، ب هما حدا النسبة Terms

والعدد أ يسمى مقدم النسبة Antecedent

والعدد ب يسمى ثاني النسبة Consequent

مثال:

إذا كان عمر سلمى ١٨ سنة وعمر ليلي ٢٤ سنة فإن:

$$نسبة \text{عمر سلمى الى عمر ليلي} = \frac{\text{عمر سلمى}}{\text{عمر ليلي}} = \frac{١٨}{٢٤} = ١٨ : ٢٤$$

$$نسبة \text{عمر ليلي الى عمر سلمى} = \frac{\text{عمر ليلي}}{\text{عمر سلمى}} = \frac{٢٤}{١٨} = ٢٤ : ١٨$$

وبما أن النسبة تكتب بصورة عدد نسبي  $\frac{أ}{ب}$  أو ككسر عادي فإنها

تُبسط كما يبسط الكسر العادي أو العدد النسبي بأن يقسم مقدم النسبة وتاليها

على العامل المشترك الأكبر بينهما ، لذلك فإن:

$$٤ : ٣ = \frac{\cancel{١٨}^٣}{\cancel{٢٤}_٤} = ٢٤ : ١٨$$



## النسبة والتناسب



$$\text{وكذلك } 2:4 = \frac{\cancel{2}^2}{\cancel{4}_2} = 18:24$$

ومن صفات النسبة أنها مجردة بلا وحدة قياس تميزها هكذا:

$$\text{ان نسبة ٨ سم : ١٢ سم} = \frac{\cancel{8}^2}{\cancel{12}_3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{والنسبة بين ٥٠ قرشاً الى ٢ دنانير} = \frac{\cancel{50}^{50}}{\cancel{2}^{10} \times 3} = \frac{5}{6}$$

بعد توحيد وحدات القياس لكل من المقدم والتالي.

مثال:

إذا كان عمر عبير ٥ سنوات و ٦ شهور

وكان عمر سمير ٦ سنوات و ٥ شهور

أوجد النسبة بين عمر عبير الى عمر سمير.

الحل:

نحوّل الأعمار الى شهور حتى يسهل ايجاد النسبة وتكون الأعمار مقاسة

بنفس وحدات القياس (الشهور).

"أنت تعلم أن السنة = ١٢ شهراً"

$$\text{عمر عبير} = (12 \times 5) + 6 = 60 + 6 = 66 \text{ شهراً}$$

$$\text{عمر سمير} = (12 \times 6) + 5 = 72 + 5 = 77 \text{ شهراً}$$

## النسبة والتناسب



$$7 : 6 = \frac{\cancel{78}^7}{\cancel{77}_7} = \frac{\cancel{77}^{77}}{\cancel{77}_7} = \frac{\text{عمر عبيد}}{\text{عمر سمير}}$$

(٢ - ٢) النسبة المئوية Percentage:

النسبة المئوية كسر عادي مقامه ١٠٠

أو نسبة تاليها ١٠٠

فالكسر العادي  $\frac{78}{100}$  يمثل نسبة مئوية. تكتب على الصورة ٧٨٪.

والكسر العادي  $\frac{45}{50}$  يحول الى نسبة مئوية يجعل مقامه ١٠٠ هكذا:

$$90\% = \frac{90}{100} = \frac{2}{2} \times \frac{45}{50}$$

وأما الكسر العادي  $\frac{3}{8}$  يحول الى نسبة مئوية بطريقة قسمة بسطه على مقامه

وعلى شكل كسر عشري هكذا:

$$\begin{array}{r} 0,375 \\ 8 \overline{) 3} \\ \underline{24} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 00 \end{array}$$

$$100\% \times \frac{375}{1000} = 0,375 = \frac{3}{8}$$

$$= 37,5\%$$



## النسبة والتناسب



وهكذا فالعلاقة بين النسبة المئوية والكسر العادي والكسر العشري

تظهر كما يلي:

$$\frac{64}{100} \leftarrow 0.64 \leftarrow 64\%$$

$$\text{فالكسر العشري } 0.7 = \frac{7}{10} = \frac{7}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{70}{100} = 70\%$$

مثال:

$$\begin{array}{r} 0.52 \\ 15 \overline{) 8.00} \\ \underline{75} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{45} \phantom{00} \\ 50 \phantom{00} \\ \underline{50} \phantom{00} \\ 0 \end{array}$$

حوّل  $\frac{8}{15}$  الى كسر عشري ونسبة مئوية

نبدأ بقسمة البسط ٨ على المقام ١٥ = ٠,٥٣

$$\therefore \frac{8}{15} = 0.53 = \frac{53}{100} = 53\%$$

وعند تحويل الكسر العشري ٣,٤٦٥٨ الى نسبة مئوية نظرية في ١٠٠٪

$$= 3.4658 \times 100\% = 346.58\% \text{ هكذا}$$

وللنسبة المئوية تطبيقات عديدة في مجال الحياة ومنها في عمليات البيع

والشراء، كما في المثال:

مثال:

اشترى خالد غسالة كتب عليها ٦٤٠ دينار، فإذا كان المحل التجاري

يخصم لزيائته ١٥٪ من ثمنها المكتوب، جد المبلغ الذي دفعه خالد ثمناً للغسالة.

$$\text{قيمة الخصم} = \frac{15}{100} \times \text{الثمن المكتوب} = \frac{15}{100} \times \frac{640}{1} = 96 \text{ دينار}$$

$$\text{ما دفعه خالد} = 640 - 96 = 544 \text{ دينار}$$



## النسبة والتناسب



أو:

ما دفعه خالد =  $100\% - 15\% = 85\%$  من الثمن المكتوب

$$\text{مادفعه خالد} = 640 \times \frac{85}{100} = 544 \text{ دينار}$$

مثال:

باع حمدان سيارته التي اشتراها بمبلغ ٥٠٠٠ دينار بمكسب ٢٠٪ فبكم دينار باعها؟

ثمن البيع =  $100\% + 20\% = 120\%$  من ثمن الشراء

$$\text{ثمن البيع} = 5000 \times \frac{120}{100} = 6000 \text{ دينار}$$

(٢ - ٣) التناسب Proportion:

$$\frac{\text{ج}}{\text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \text{ التناسب هو تساوي نسبتين مثل}$$

أو:

$$\text{أ : ب} = \text{ج : د}$$

فالعددان أ ، د يسميان طرفا التناسب extremes

والعددان ب ، ج يُسميان وسطا التناسب means

وحتى تشكل النسبتان  $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$  ،  $\frac{\text{ج}}{\text{د}}$  تناسبا يجب أن يكون:

$$\text{حاصل ضرب الطرفين} = \text{حاصل ضرب الوسطين}$$



## النسبة والتناسب



ويترجم هذا الكلام بقاعدة الضرب التبادلي Cross Multiplication:

وبالرموز:

إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \leftarrow أ د = ب ج$  (قاعدة الضرب التبادلي)  
 وحتى تشكل النسب  $\frac{أ}{ب}$  ،  $\frac{ج}{د}$  تناسباً يجب أن يكون  $أ د = ب ج$   
 أي أن  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \leftarrow أ د = ب ج$  والعكس صواب.

مثال:

هل تشكل النسبتان  $\frac{٣}{٤}$  ،  $\frac{٧}{٨}$  تناسباً؟ ولماذا؟

الحل:

$$\frac{٧}{٨} \stackrel{؟}{=} \frac{٣}{٤} \quad (\text{ونقرأ هل } \frac{٣}{٤} = \frac{٧}{٨})$$

$$٧ \times ٤ \stackrel{؟}{=} ٨ \times ٣ \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$٢٨ \neq ٢٤ \quad \text{أي أن}$$

$$\frac{٧}{٨} \neq \frac{٣}{٤} \quad \text{ومنها}$$

$$\frac{٧}{٨} ، \frac{٣}{٤} \quad \text{أي لا تشكلان تناسباً إطلاقاً.}$$

مثال:

هل تشكل النسبتان  $\frac{٥}{٦}$  ،  $\frac{١٠}{١٢}$  تناسباً؟ ولماذا؟

الحل:

$$\frac{١٠}{١٢} \stackrel{؟}{=} \frac{٥}{٦}$$



### النسبة والتناسب



وبالضرب التبادلي:  $10 \times 6 \stackrel{?}{=} 12 \times 5$

$$60 \stackrel{?}{=} 60$$

نعم:  $60 = 60 \leftarrow$  إذن  $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$  وتشكلان تناسباً

وكذلك:  $\frac{20}{5} = \frac{16}{4}$  تشكلان تناسباً لأن:

$$(20)(4) = (16)(5)$$

كون:  $80 = 80$

مثال:

هل العددان النسبيين  $\frac{3}{6}$  ،  $\frac{7}{14}$  متساويان؟

باعتبار أن العددين النسبيين كنسب، فإن التساوي ينتج من الضرب التبادلي. وكان السؤال: هل النسبتان  $\frac{3}{6}$  ،  $\frac{7}{14}$  تشكلان تناسباً؟

$$\frac{7}{14} \stackrel{?}{=} \frac{3}{6} \quad \text{أي}$$

$$7 \times 6 \stackrel{?}{=} (14)(3)$$

$$42 = 42 \quad \text{أي}$$

نعم  $\frac{7}{14} = \frac{3}{6}$  كعددين نسبيين متساويين

أو كتناسب لكون النسبتين  $\frac{7}{14}$  ،  $\frac{3}{6}$  متساويتان



× نوعا التناسب:

للتناسب نوعين هما:

تناسب طردي Direct Proportion:

مثال:

إذا كان ثمن كتاب واحد هو ٥٠ قرشاً فما ثمن ٣ كتب من نفس النوع

ثمن الكتب = ثمن الكتاب × العدد

$$= ٥٠ \times ٣ = ١٥٠ \text{ قرشاً}$$

فالملاحظ أن ثمن الكتب يزداد بزيادة عددها.

وان ثمن الكتاب =  $\frac{\text{ثمن الكتب}}{\text{عددها}}$  = مقداراً ثابتاً = ٥٠ قرشاً في هذا السؤال.

هذا هو التناسب الطردي بين ثمن الكتب وعددها.

وبما أن التناسب يشتمل على أربعة حدود هما الطرفان والوسطان، فإذا علم

من حدوده ثلاثة، فإننا نستطيع أن نعلم الحد الرابع بطريقة الضرب التبادلي كما

يلي:

$$\text{إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ فإن } أ د = ب ج$$

مثال:

إذا قطعت سيارة ١٦٠ كم في ساعتين، فكم كيلومتراً تقطع في ٥

ساعات إذا سارت بنفس السرعة؟



## النسبة والتناسب



من الملاحظ أن المسافة التي تقطعها السيارة تزداد بزيادة الزمن (عدد الساعات) لذا فالتناسب طردي، وحله (حل التناسب) يكون بالضرب التبادلي كالتالي:

$$\text{كم ساعة} \quad \text{والضرب التبادلي:} \quad 5 \times \frac{160}{2} = n \times \frac{2}{2}$$

$$n = (80) (5) = 400 \text{ كم تقطع في } 5 \text{ ساعات}$$

## تناسب عكسي Inverse Proportion:

يحتاج رجل الى 5 ساعات لحراثة حديقة منزل، فكم ساعة يحتاج رجلان لحراثة نفس حديقة المنزل؟

نلاحظ أن عدد الرجال  $\times$  عدد الساعات =  $1 \times 5 = 5$  ساعة يحتاج حراثة المنزل

وكذلك عدد الرجال  $\times$  عدد الساعات =  $2 \times n = 2n$  ساعة تحتاج حراثة الحديقة

$$\text{أي أن } \frac{2}{2} = n \quad (\text{حراثة الحديقة في الحالتين})$$

$$n = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ ساعة يحتاج رجلان لحراثة نفس الحديقة}$$

نلاحظ أنه كلما ازداد عدد الرجال قلت عدد الساعات اللازمة للقيام

بنفس العمل.

هذا هو التناسب العكسي  $\leftarrow$  اذا ازداد المتغير الأول (رجال)

قل المتغير الثاني (ساعات) للقيام بنفس العمل

وقد يكون بالضرب الأفقي هكذا:

$$\begin{array}{cc} \text{رجال} & \text{ساعات} \\ 1 & \leftarrow 5 \\ 2 & \leftarrow n \end{array}$$

وبطريقة الضرب الأفقي



## النسبة والتناسب



$$ن \times \frac{2}{2} = \frac{5 \times 1}{2}$$

∴ ن =  $\frac{5}{2} = 2.5$  ساعة يحتاج رجلان للقيام بنفس العمل.

مثال:

يستغرق ٤ رجال الى ٢٤ يوماً لجني محصول ثمار بستان من الزيتون، فكم يوماً يحتاج ٦ رجال لجني محصول نفس البستان؟

$$\begin{array}{l} \text{رجال ساعات} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \end{array} \quad \text{وبالضرب الأفقي:} \quad \frac{2}{2} \times ن = \frac{5 \times 1}{2}$$

ن = ١٦ يوماً يحتاج ٦ رجال.

× قوانين التناسب:

للتناسب  $\left( \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \right)$  عدة قوانين نعرض بعضاً منها فقط لأهميتها كما يلي:

$$× \text{ إذا كان } \frac{8}{16} = \frac{7}{14} \leftarrow \text{ فإن } \frac{16}{8} = \frac{14}{7}$$

$$\text{كون } 112 = (16 \times 7) = (8 \times 14)$$

وبشكل عام إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $\frac{ب}{أ} = \frac{د}{ج}$  (مقلوب النسبتين)

$$× \text{ إذا كان } \frac{8}{16} = \frac{7}{14} \leftarrow \text{ فإن } \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

$$\text{كون } 112 = (14 \times 8) = (16 \times 7)$$

وبشكل عام إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $\frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$  (إبدال الوسطين)

× ومن قوانين التناسب ما يفيد في حل مسائل أو تطبيقات في العلوم الأخرى

$$× \text{ إذا كان } \frac{6}{12} = \frac{5}{10} \leftarrow \text{ فإن } \frac{12+6}{12} = \frac{10+5}{10}$$



## النسبة والتناسب



$$\frac{18}{12} = \frac{15}{10} \quad \text{لأن} \quad 18 = 18 \times 10 = (12 \times 15) \quad \text{كون}$$

$$\frac{ج+د}{د} = \frac{أ+ب}{ب} \quad \text{فإن} \quad \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \quad \text{كان إذا عام}$$

$$\frac{ج-د}{د} = \frac{أ-ب}{ب} \quad \text{ليس هذا فحسب بل}$$

$$\frac{6-}{12} = \frac{5-}{10} \leftarrow \frac{12-6}{12} = \frac{10-5}{10} \quad \text{لأن}$$

$$60 - = (10)(6 -) = (12)(5 -) \quad \text{كون}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{6+3}{8+4} \quad \text{فإن} \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{إذا كان} \quad \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{أيضاً}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \quad \text{كون} \quad 36 = 3 \times 12 = 4 \times 9 \quad \text{لأن}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \quad \text{وكذلك} \quad 72 = 12 \times 6 = 8 \times 9 \quad \text{لأن}$$

$$\frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \quad \text{فإن} \quad \frac{ج}{د} = \frac{أ+ب}{د+ب} \quad \text{وبشكل عام إذا كان}$$

$$\frac{ج}{د} = \frac{أ-ب}{د-ب} \quad \text{ليس هذا فحسب بل:} \quad \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3-}{8-4} = \frac{3}{4} \quad \text{كون}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{3-}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{لأن}$$

$$\frac{أ-ب}{د-ب} = \frac{أ+ب}{د+ب} \quad \text{وكذلك} \quad \text{(تحقق من المساواة)}$$

والآن نلخص قوانين التناسب السبعة بما يلي وبالرموز فقط:

$$\text{إذا كان} \quad \frac{ج}{د} = \frac{أ}{ب} \quad \text{فإن:}$$

$$(i) \quad \frac{د}{ج} = \frac{ب}{أ} \quad \text{(المقلوب لكل من النسبين)}$$

$$(ii) \quad \frac{ب}{د} = \frac{أ}{ج} \quad \text{(إبدال الوسيطين)}$$

$$(iii) \quad \frac{ج+د}{د} = \frac{أ+ب}{ب} \quad \text{(الجمع لحدي النسبة)}$$

$$(iv) \quad \frac{ج-د}{د} = \frac{أ-ب}{ب} \quad \text{(الطرح لحدي النسبة)}$$



## النسبة والتناسب



$$(v) \quad \frac{ج}{د} = \frac{أ + ج}{ب + د} = \frac{أ}{ب} \quad (\text{نسبة ثالثة بالجمع})$$

$$(vi) \quad \frac{ج}{د} = \frac{ج - أ}{د - ب} = \frac{أ}{ب} \quad (\text{نسبة ثالثة بالطرح})$$

$$(vii) \quad \frac{ب - أ}{د - ج} = \frac{ب + أ}{د + ج} \quad (\text{الجمع يساوي الطرح})$$

"وهذا البند بشكل عام":

$$\text{إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} = \frac{هـ}{و} = \dots = \frac{م}{ن}$$

$$\text{فإن } \frac{أ + ج + هـ + \dots + م}{ب + د + و + \dots + ن} = \frac{أ}{ب} \quad \text{وهكذا...}$$

مثال:

إذا كان  $\frac{٦}{٢١} = \frac{٢}{٧}$  فاملاً الفراغات المتجسدة بالمستطيلان فيما يلي وباستخدام قوانين التناسب لتحقيق المساواة في كل منها:

$$\text{كون } ٤٢ = ٦ \times ٧ = ٢١ \times ٢ \quad \frac{٧}{\boxed{٢١}} = \frac{٢}{٦} \quad \times$$

التحقق بالضرب التبادلي دائماً. أو بالتبسيط والاصفار أحياناً.

$$\begin{aligned} \frac{٢}{٩} &= \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢} \times ٩} = \frac{٢}{٩} \quad \text{كون} & \frac{\boxed{٦}}{\boxed{٢١+٦}} &= \frac{٢}{٧+٢} \quad \times \\ \frac{٢٧}{١٥} &= \frac{٩}{٥} \quad \text{كون} & \frac{\boxed{٢١+٦}}{\boxed{٢١-٦}} &= \frac{٧+٢}{٧-٢} \quad \times \end{aligned}$$

مثال:

$$\text{إذا كان } \frac{٢٠}{٤٤} = \frac{٥}{١١} \quad \text{فبين أن:}$$

$$\text{باستخدام قواعد التناسب} \quad \frac{٢٤}{٤٤} = \frac{٦}{١١}$$



## النسبة والتناسب



الحل:

$$\frac{20}{44} = \frac{5}{11} \quad \text{بما أن}$$

$$\frac{44 - 20}{44} = \frac{11 - 5}{11} \quad \text{فإن} \quad (\text{الطرح لحدي كل نسبة فقط})$$

$$\frac{24 -}{44} = \frac{6 -}{11} \quad \text{أي أن}$$

$$\underline{\underline{264 -}} = (24 -) (11) = (44) (6 -)$$

(٢ - ٤) مقياس الرسم Scale Drawing:

عند رسم الخرائط الجغرافية فإننا نقوم بتصغير مساحات القارات والدول الحقيقية ليتم تمثيلها على الورق. حسب مقياس رسم مناسب نجده دائماً في أعلى الخريطة وعلى الجانب الأيمن أو الأيسر - لست أدري - ؟

ومقياس الرسم هذا هو النسبة الثابتة بين المسافات على الخارطة الى المسافات بأبعادها الحقيقية على الأرض، أي أن:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{البعد بين النقطتين على الورق (الخارطة)}}{\text{البعد الحقيقي بينهما على الأرض}}$$

ونعبر عن البعدين في البسط والمقام (كون النسبة كسر عادي) بوحدات القياس نفسها.

وعلى سبيل المثال:

إذا كان مقياس الرسم لخارطة ما هو ١ : ٢٥٠ ٠٠٠ فإن كل اسم على الخريطة يقابله أو يمثل على الأرض ٢٥٠ ٠٠٠ سم فإذا ما قيست المسافة الأفقية بين مدينتين على الخارطة وكانت ٢ سم فإن المسافة الحقيقية والأفقية بين المدينتين على الأرض تحسب من القانون:

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{البعد على الخارطة}}{\text{البعد على الأرض}}$$



## النسبة والتناسب



$$\frac{2 \text{ سم}}{n \text{ سم}} = \frac{1}{250000}$$

وبالضرب التبادلي  $1 \times 250000 = 2 \times n$  سم

$$250000 = 2 \times n \text{ سم البعد الحقيقي}$$

ولما كانت المسافة الحقيقية على الأرض بين المدن تقاس بالكم =  $100000$  سم

$$100000 \text{ سم} = \frac{250000 \text{ سم}}{2} = 125000 \text{ سم} = 1.25 \text{ كم}$$

مثال:

إذا كان طول سلمى  $1.4$  سم وطولها في الصورة  $3.5$  سم أوجد مقياس الرسم للصورة - الصورة للإنسان كالخارطة بالنسبة للدول - .

$$\frac{3.5 \text{ سم}}{1.4 \text{ م}} = \frac{\text{طول سلمى في الصورة}}{\text{طولها الحقيقي}} = \text{مقياس الرسم للصورة}$$

ولما كان  $1 \text{ م} = 100 \text{ سم}$

$$\frac{3.5}{1.4 \times 100} = \frac{3.5}{140} = \frac{1}{40}$$

أي أن كل اسم من طول الصورة يمثل  $40$  سم من طول سلمى الحقيقي.

(٢ - ٥) التقسيم التناسبي Proportional Division:

هل تعلم أن عملية التقسيم للأشياء تتم بطريقتين هما:

(١) عملية التقسيم بالتساوي.

(٢) عملية التقسيم بالتباين - عدم التساوي-



## النسبة والتناسب



مثال:

اقسم ٤٠ دينار بين أحمد وحمدان بالتساوي:

$$\text{حصة أحمد} = \frac{40}{2} = 20 \text{ دينار}$$

$$\text{حصة حمدان} = \frac{40}{2} = 20 \text{ دينار}$$

أي أن حصة أحمد = حصة حمدان = ٢٠ دينار لكل منهما.

ولكن عملية التقسيم بالتباين ترتبط بعدم التساوي، كأن يأخذ حمدان ٣ حصص مقابل أن يأخذ أحمد حصتين لتباين أعمارهما!!

فهذا التقسيم غير المتساوي أو التقسيم التناسبي يتم كما يلي:

$$\text{مجموع الحصص} = 2 + 3 = 5 \text{ حصص}$$

$$\text{مقدار الحصة الواحدة} = \frac{40}{5} = 8 \text{ دنانير}$$

$$\text{ما يأخذه حمدان} = 3 \times 8 = 24 \text{ دينار}$$

$$\text{ما يأخذه أحمد} = 2 \times 8 = 16 \text{ دينار}$$

$$\text{المبلغ } 40 \text{ دينار}$$

وهكذا التقسيم بالتساوي  $20 : 20 \leftarrow 2 : 2$  كنسبة:

التقسيم بالتباين  $24 : 16 \leftarrow 3 : 2$

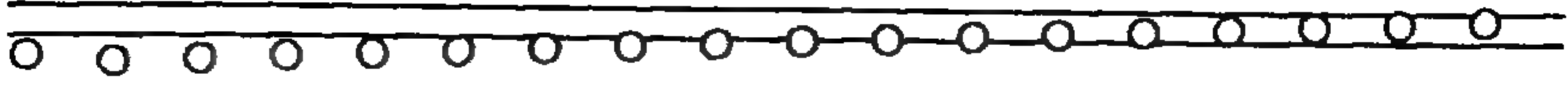
مثال:

$$\text{اقسم } 1550 \text{ دينار بين ثلاثة أشخاص بنسبة } \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$$

أولاً: نتخلص من الكسور وذلك بضرب كل نسبة في المضاعف المشترك الأصغر للمقامات ٥ ، ٣ ، ٢ ألا وهو ٣٠ هكذا:

$$\left( \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} \right) 30 \leftarrow \frac{30}{2} : \frac{30}{3} : \frac{30}{5} = 15 : 10 : 6$$

### النسبة والتناسب



مجموع الحصص =  $6 + 10 + 15 = 31$  حصة

مقدار الحصة الواحدة =  $\frac{1500}{31} = 50$  دينار

ما يأخذه الأول =  $6 \times 50 = 300$  دينار

ما يأخذه الثاني =  $10 \times 50 = 500$  دينار

ما يأخذه الثالث =  $15 \times 50 = 750$  دينار

المبلغ 1500 دينار

ومن الجدير بالذكر أن عملية التقسيم التناسبي تستخدم في توزيع أرباح المشاريع الاقتصادية -تجارية أو صناعية- على الشركاء كون رؤوس أموالهم في الشركة عادة لا تكون متساوية بالمقدار، لذا تقسم عليهم الأرباح بنسبة رؤوس الأموال.

كما في هذا المثال:

اشترك خالد وخلدون وخلود في مشروع تجاري، فدفع خالد 8000 دينار من رأس المال، ودفع خلدون 10000 دينار من رأس المال، ودفعت خلود 12000 دينار من رأس المال، وفي نهاية العام وزعت الأرباح البالغة 3000 دينار عليهم بنسبة رؤوس أموالهم أو نسبة ما دفعوه من رأس المال للمشروع، أوجد نصيب كل منهم من الأرباح.

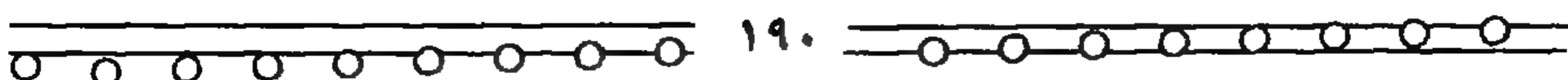
من العدل أن توزع الأرباح بنسب تماثل النسب بين رؤوس أموالهم وهي:

$$8000 : 10000 : 12000$$

بعد تبسيط النسب ← 8 : 10 : 12 ← 4 : 5 : 6

مجموع الحصص :  $4 + 5 + 6 = 15$  حصة

مقدار الحصة الواحدة :  $\frac{3000}{15} = 200$  دينار



## النسبة والتناسب



ما يأخذه خالد من الأرباح =  $4 \times 200 = 800$  دينار

ما يأخذه خلدون من الأرباح =  $5 \times 200 = 1000$  دينار

ما تأخذه خلود من الأرباح =  $6 \times 200 = 1200$  دينار

مجموع الأرباح 2000 دينار

كما أن التركات في الشريعة الاسلامية توزع على الورثة بطريقة التقسيم  
التناسبي كما في المثال:

توفي رجل وترك 42000 دينار، أوصى منها للجمعيات الخيرية بمبلغ 6000  
دينار، وكان عليه دين مقداره 4000 دينار، فإذا ترك بعد وفاته زوجة وولدين  
وثلاث بنات، جد نصيب كل منهم من التركة.

حسب الشرع يخصم أولاً قيمة الوصية للجمعيات الخيرية:

$$42000 - 6000 = 36000 \quad \text{دينار يتبقى من التركة}$$

ثم يسدد الدين البالغ 4000 دينار.

$$36000 - 4000 = 32000 \quad \text{دينار المتبقي للزوجة والأولاد والبنات}$$

ثم تأخذ الزوجة نصيبها البالغ  $\frac{1}{8}$  ( الباقي من التركة )

$$4000 = 32000 \times \frac{1}{8} = \quad \text{دينار}$$

$$32000 - 4000 = 28000 \quad \text{والباقي دينار يوزع على الأولاد والبنات}$$

بنسبة 2 : 1 - للذكر مثل حظ الأنثيين -

$$\text{حصص الأولاد} = 2 + 2 = 4 \quad \text{حصص}$$

$$\text{حصص البنات} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad \text{حصص}$$

$$\text{مجموع الحصص} = 4 + 3 = 7 \quad \text{حصص}$$

### النسبة والتناسب



$$\text{مقدار الحصة الواحدة} = \frac{28000}{8} = 4000 \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار حصة الولد الواحد} = 4000 \times 2 = 8000 \text{ دينار}$$

$$\text{مقدار حصة البنت الواحدة} = 4000 \times 1 = 4000 \text{ دينار}$$

للتحقق:

$$\text{للوالدين} + \text{للبنات الثلاث} + \text{للزوجة} = 22000 \text{ دينار}$$

$$22000 = 4000 + (4000) \times 3 + (8000) \times 2 \text{ دينار}$$

مثال:

توفيت سيدة وتركت زوجاً وولداً وبنتاً، وقدرت تركتها بعد وفاتها بمبلغ 24000 دينار.

ما نصيب كل منهم من التركة ( علماً بأن حصة الزوج =  $\frac{1}{4}$  التركة )

$$\text{حصة الزوج} = \frac{1}{4} \times 24000 = 6000 \text{ دينار}$$

$$\text{الباقى والبالغ} = 24000 - 6000 = 18000 \text{ دينار توزع بين الولد والبنت}$$

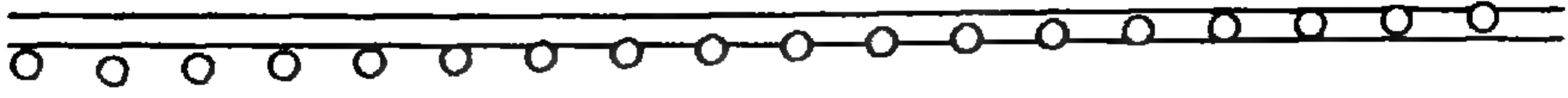
بنسبة 2 : 1

$$\text{مجموع الحصص} = 2 + 1 = 3 \text{ حصص}$$

$$\text{مقدار الحصة الواحدة} = \frac{18000}{3} = 6000 \text{ دينار}$$

$$\text{ما يأخذ الولد} = 6000 \times 2 = 12000 \text{ دينار}$$

$$\text{ما تأخذه البنت} = 6000 \times 1 = 6000 \text{ دينار}$$



(٢-٦) أمثلة محلولة على النسبة والتناسب

مثال (١):

اكتب النسب التالية بأبسط صورة:

$$\frac{12}{5}, \frac{1.8}{3}, \frac{2.5}{6.5}$$

الحل:

$$\frac{12}{5} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \quad \text{بأبسط صورة}$$

$$\frac{1.8}{3} = \frac{3}{5} = \frac{1.8}{3} = \frac{1.8}{3} \quad \text{بأبسط صورة}$$

$$\frac{2.5}{6.5} = \frac{5}{13} = \frac{2.5}{6.5} = \frac{2.5}{6.5} \quad \text{بأبسط صورة}$$

مثال (٢):

هل يكون كل زوج من النسب التالية تناسباً أم لا؟

$$\left( \frac{4}{16}, \frac{5}{20} \right), \left( \frac{10}{15}, \frac{8}{9} \right)$$

الحل:

$$\frac{4}{16} \stackrel{?}{=} \frac{5}{20} \quad (\text{وتقرأ } \stackrel{?}{=} \text{ هل تساوي})$$

$$\text{بالضرب التبادلي } (4)(20) \stackrel{?}{=} (16)(5)$$

$$80 = 80 \quad \text{نعم}$$

$$\therefore \frac{4}{16}, \frac{5}{20} \text{ تشكل تناسباً}$$

$$\frac{4}{16} = \frac{5}{20} \quad \text{ويكتب على الصورة:}$$



## النسبة والتناسب



ويمكن أن يقال بعد التبسيط أن:

$$\frac{1}{4} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}} = \frac{1}{4}$$

أي أن  $\frac{4}{16} = \frac{5}{20}$  كأنهما عددان نسبيا من صف تكافؤ واحد هو  $\frac{1}{4}$

$$\dots = \frac{5}{20} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{15} \neq \frac{8}{9}$$

لا : لأن  $120 \neq 90$

أي أن  $\frac{10}{15}$  ،  $\frac{8}{9}$  لا يشكلان تناسبا

ويمكن أن يقال أن  $\frac{10}{15}$  ،  $\frac{8}{9}$  كعدين نسبين ليسا من صف تكافؤ واحد.

مثال (٣):

يُنتج مصنع ٢١٠ أجهزة كهربائية في ٧ أيام، كم جهازاً ينتج في ٣٠ يوماً؟

بما أن المصنع ينتج أكثر بزيادة عدد الأيام فالتناسب طردي:

$$\frac{210 \times 30}{\cancel{7}} = \frac{7}{7} \times \text{بالمضرب التبادلي ن} \quad \begin{array}{l} \text{جهاز} \quad \text{يوم} \\ 210 \leftarrow 7 \\ 30 \leftarrow 30 \end{array}$$

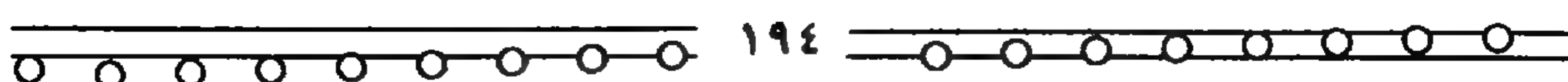
ن = ٩٠٠ جهاز كهربائي ينتج المصنع في ٣٠ يوم تحت نفس الظروف.

مثال (٤):

يستطيع ١٢ عاملاً حفر بئر بمواصفات خاصة في ٦ أيام، بكم يوم يستطيع

١٨ عاملاً حفر بئر مماثلة له بالمواصفات؟

$$\begin{array}{l} \text{عامل} \quad \text{يوم} \\ 12 \leftarrow 6 \\ 18 \leftarrow 18 \end{array}$$



### النسبة والتناسب



بما أن التناسب عكسي حيث بزيادة عدد العمال تقل أيام انجاز العمل،  
كون البئر نفسه:

$$\text{بالضرب الأفقي: } \cancel{18} \times \frac{1}{\cancel{18}} = \cancel{1} \times \frac{\cancel{18}^2}{\cancel{18}_1}$$

$$ن = 4 \text{ أيام يحتاج } 18 \text{ عاملاً لحفر بئر مماثلة}$$

وطريقة أخرى للحل:

$$12 \times 6 = 72 \text{ يوماً يحتاج العامل الواحد لانجاز حفر البئر}$$

$$\frac{72}{18} = 4 \text{ أيام يحتاج } 18 \text{ عامل لانجاز حفر نفس البئر}$$

مثال (٥):

أوجد قيمة المتغيرات فيما يلي لتحقيق المساواة دائماً:

$$\frac{\boxed{ن}}{27} = \frac{2}{9} \quad (i)$$

$$\text{بالضرب التبادلي } \frac{\cancel{27}^3}{\cancel{9}_1} \times 2 = ن \times \frac{\cancel{9}_2}{\cancel{9}_1}$$

$$ن = 6$$

$$(ii) \text{ إذا كان } \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{\boxed{ن} + 21}{24} = \frac{8 + \boxed{ن}}{8} \text{ فإن}$$

من خواص التناسب:

$$\frac{24 + 21}{24} = \frac{8 + 7}{8} \leftarrow \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$$

$$\text{أي أن } 24 = 2ن , 7 = 1ن$$



## النسبة والتناسب



$$(iii) \text{ اذا كان } \frac{14}{\boxed{ن}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{فإن } \frac{\boxed{ن}}{14} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{\cancel{7}^7 \cancel{2}^2 + 7}{\cancel{1}^1} = ن \times \frac{2}{2} \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$ن = 49$$

$$\frac{\cancel{7}^7 \cancel{2}^2 + 7}{\cancel{1}^1} = \frac{ن \times 2}{2} \quad \text{وبالضرب التبادلي}$$

$$ن = 49$$

مثال (٦):

$$\frac{10 -}{ن} = \frac{5 -}{12} \quad \text{حل التناسب}$$

$$\frac{(12)(5 -)}{5 -} = (ن) \frac{(5 -)}{5 -}$$

$$ن = (12)(2) = 24$$

مثال (٧):

وزع أحد الآباء ٤٩٠٠٠ دينار بين أبنائه الثلاثة بنسبة أعمارهم البالغة آنذاك ٤ سنوات ، ٨ سنوات ، ١٦ سنة ، كم دينار يأخذ كل منهم؟

$$\text{الحصص كنسب} = ٤ : ٨ : ١٦ \leftarrow ٤ : ٢ : ١$$

$$\text{مجموع الحصص} = ٧ + ٤ + ٢ + ١$$

$$\text{مقدار الحصة الواحدة} = \frac{٤٩٠٠٠}{٧} = ٧٠٠٠ \text{ دينار}$$

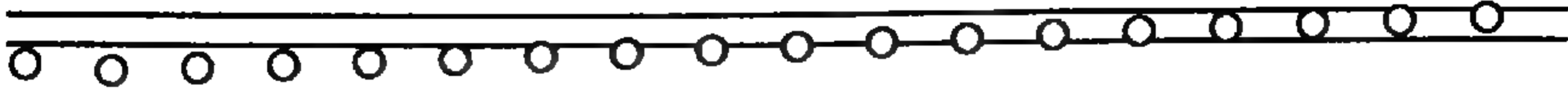
$$\text{لأول} = ٧٠٠٠ \times ١ = ٧٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{لثاني} = ٧٠٠٠ \times ٢ = ١٤٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{لثالث} = ٧٠٠٠ \times ٤ = ٢٨٠٠٠ \text{ دينار}$$

$$\text{المبلغ} \quad \underline{\underline{٤٩٠٠٠}} \text{ دينار}$$

### النسبة والتناسب



مثال (٨):

إذا كان البعد بين مدينتين على الخارطة ٣ سم وكان مقياس الرسم لتلك الخارطة هو ١ : ١٥ ٠٠٠ ٠٠٠ احسب البعد الحقيقي بين المدينتين بالكيلومترات.

$$\frac{\text{مقياس الرسم}}{\text{ن سم}} = \frac{١}{١٥٠٠٠٠٠٠}$$

$$\text{بالتضرب التبادلي} \quad ١ \times \text{ن} = ١٥٠٠٠٠٠٠ \times ٣$$

$$\text{البعد الحقيقي} = ٤٥٠٠٠٠٠٠ \text{ سم}$$

$$\text{وبما أن الكم} = ١٠٠٠٠٠ \text{ سم} \quad \text{حيث كم} = ١٠٠٠ \text{ م} ، \text{ م} = ١٠٠ \text{ سم}$$

$$\text{البعد الحقيقي} = \frac{٤٥٠٠٠٠٠٠}{١٠٠٠٠٠} = ٤٥٠ \text{ كم}$$

مثال (٩):

$$\text{إذا كان} \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}} \text{ فما قيمة:}$$

$$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} \left( \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{ج} + \text{أ}} \right)$$

الحل:

$$\text{بما أن} \frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{د}}$$

$$\text{فإن} \frac{\text{أ} + \text{ج}}{\text{ب} + \text{د}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \quad \text{من خواص التناسب}$$

$$\text{ومنها} \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{ج} + \text{أ}} \quad \text{من خواص التناسب}$$

$$١ = \frac{\text{أ}}{\text{ب}} \times \frac{\text{ب}}{\text{أ}} = \left( \frac{\text{ب} + \text{د}}{\text{ج} + \text{أ}} \right) \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

## النسبة والتناسب



مثال (١٠):

إذا كان الثمن المكتوب على تلفزيون في أحد المحلات التجارية ٧٧٠ دينار  
وكان المحل يخصم ١٥٪ من الثمن المكتوب، فكم ديناراً يصبح ثمن التلفزيون؟

$$\text{الخصم} = 770 \times \frac{15}{100} = \frac{231}{2} = 115,5 \text{ دينار}$$

$$\text{الثمن بعد الخصم} = 770 - 115,5 = 654,5 \text{ دينار}$$

مثال (١١):

اكتب النسبة التالية بأبسط صورة:

٤٠٠ فلس : دينارين

$$= 400 \text{ فلس} : 2 \times 1000 = 2000 \text{ فلس}$$

$$400 \text{ فلس} : 2000 \text{ فلس} = \frac{400}{2000} = \frac{1}{5} = 1 : 5$$



(٢ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسات والدارسين

(١) حل التناسبات التالية:

$$\{٧١٣, ٧\} \quad \frac{١٢}{٢٣} = \frac{٢٧٢}{س}, \quad \frac{س}{١٤} = \frac{٢}{٦}$$

$$(٢) \text{ اذا كان } \frac{٧}{١٤} = \frac{ج}{د}, \quad \frac{٥}{١٠} = \frac{أ}{ب}$$

أوجد:

$$(i) \frac{أ + ب}{ب} \quad (ii) \frac{أ + ج}{ب + د} \\ (iii) \frac{أ - ب}{ب + أ} \quad (iiii) \frac{ج - د}{ج}$$

$$(٣) \text{ اذا كانت } \frac{١}{٢} = -أ$$

$$\frac{١}{٣} = ب$$

$$\frac{١}{٤} = -ج$$

$$\frac{١}{٥} = د$$

(٤) أوجد (أ + ب) : (ج : د)

(٥) املأ الفراغات فيما يلي لتحقيق المساواة في كل سطر أفقي:

نسبة مئوية	كسر عشري	كسر عادي	
...	...	$\frac{٢}{٥}$	(i)
...	%٤٠	...	(ii)
...	...	٠,٢٤	(iii)



(٦) عبّر عن نسبة ٢ سم<sup>٢</sup> الى ١٢ سم<sup>٢</sup> بصورة مئوية {٢٥٪}

وعبّر عن نسبة ٤٥ سم الى ٢ متر بصورة مئوية {٢٢,٥٪}

ثم عبّر عن نسبة ٨٠٠ غم الى ٢ كغ بصورة مئوية {٤٠٪}

(٧) ما قيمة ٣٠٪ من ٢٥٠ ؟ { ٧٥ }

وما قيمة ٥٪ من ١٨٢ ؟ { ٩,١ }

(٨) عدد طلاب مدرسة ١٤٦٠ طالباً منهم ٣٥٪ يمارسون رياضة السباحة، ما عدد

الذين لا يمارسون السباحة؟

{ ٩٤٩ طالباً }

(٩) اذا كان ثمن سيارة ٩٠٠٠ دينار قبل عام، وارتفع ثمنها الآن بمقدار ٧,٥٪

كم أصبح ثمنها الجديد الآن؟

{ ٩٦٧٥ ديناراً }

(١٠) اذا كان السعر المكتوب على تلفزيون معروض للبيع في أحد معارض

المحلات التجارية هو ١١٥٠ دينار، وكان الخصم المسموح به عليه ٢٠٪ من

الثن المكتوب، كم دينار يدفع المشتري ثمناً له؟

{ ٩٢٠ دينار }

(١١) اذا بيعت دراجة هوائية بمبلغ ٢٧٣ ديناراً، وبمكسب ٥٪ من ثمن الشراء،

ما ثمن شراء هذه الدراجة؟

{ ٢٦٠ دينار }



### النسبة والتناسب



(١٢) اذا علمت أن ثمن شراء كيس البطاطا "وزن ٥٠ كغ" هو ٤,٥ دينار، وثمن بيعه للمستهلكين هو ١٢ ديناراً. احسب النسبة المئوية للمكسب.

$$\{ 166.7\% \}$$

(١٣) اشترى شخص ثلاجة "١٢ قدم" بمبلغ ٨٠٠ دينار، وباعها بمبلغ ٥٥٠ ديناراً "لظروف خاصة"، احسب النسبة المئوية لخسارته.

$$\{ 31.25\% \}$$

(١٤) طبيب دخله الشهري من عمله ١٨٠٠٠ دينار، كم ديناراً يدفع ضريبة دخل اذا كانت نسبة الضريبة ١٢٪

$$\{ 2160 \text{ دينار} \}$$

(١٥) اذا كان عدد سكان دولة عام ٢٠٠٠ م هو ٢٢٥ ٠٠٠ نسمة، وأصبح عدد السكان عام ٢٠٠٥ م ٥٢٧٠٩ ٠٠٠ نسمة، عبّر عن الزيادة التي حصلت للسكان بالنسبة المئوية.

$$(16) \text{ اذا كان } \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٤} \text{ أوجد قيمة } \frac{٥س - ٢ص}{٧س + ٢ص} \{ \frac{٢}{٢٩} \}$$

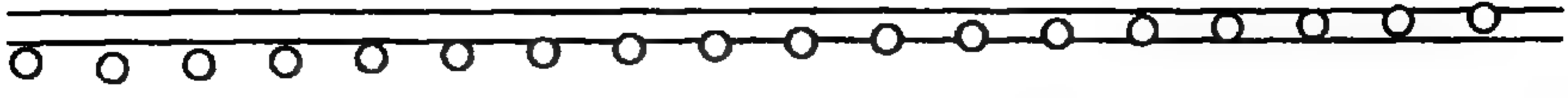
{ ارشاد: اقسم البسط والمقام على ص }

(١٧) عدد طلاب مدرسة أساسية مختلطة ٢٥٠ فإذا كان عدد الطلاب فيها ١٥٠ فما النسبة المئوية لعدد الطالبات في المدرسة؟

$$\{ 140\% \}$$



## النسبة والتناسب



(١٨) تقدم ٥٠ طالباً لامتحان في الرياضيات، نجح منهم ٣٨ طالباً، ما النسبة

المئوية للراسبين في نفس الامتحان؟

{ ٢٤ % }

$$(١٩) \text{ اذا كان } \frac{س}{ص} = \frac{٢}{٥}$$

فأي من العبارات التالية ليس صواب:

$$(١) \frac{٥}{٢} = \frac{ص}{س}$$

$$(٢) \frac{٢+٥}{٥} = \frac{ص+س}{س}$$

$$(٣) \frac{٥+٢}{٥} = \frac{س+ص}{ص}$$

$$(٤) \frac{٢-٥}{٢} = \frac{ص-س}{س}$$

{ العبارة الثانية بالتأكيد }

(٢٠) تشارك رسلان وسلمان وحمدان في احدى المشروعات التجارية ودفع كل

منهم وعلى الترتيب ٤٠ ٠٠٠ ، ٥٠ ٠٠٠ ، ٦٠ ٠٠٠ دينار كرأسمال،

وكانت أرباحهم في نهاية أحد الأعوام ٤٥٠٠٠ دينار. ما نصيب كل منهم من

الأرباح؟

{ ١٨٠٠٠ ، ١٥٠٠٠ ، ١٢٠٠٠ }

{ ارشاد: توزع الأرباح بنسبة رؤوس أموالهم }

## النسبة والتناسب



(٢١) انتقلت احدى السيدات الى رحمة الله بعد أن كان زوجها قد سبقها الى هناك منذ سنوات، ولم تترك إلا مبلغ ٩٦٠٠٠ دينار، بين كيف يتقاسم ورثتها هذا المبلغ علماً بأنهم ولد وبنتان فقط.

$$\{ ٢٤٠٠٠ , ٢٤٠٠٠ , ٤٨٠٠٠ \}$$

$$(٢٢) \text{ ما النسبة بين اللترو } ٤٠٠ \text{ سم}^2 \{ ٢ : ٥ \}$$

$$(٢٣) \text{ اوجد ناتج جمع } (٨٥ \times ٧\%) + (٩٠ \times ٤\%) + (٢٠٩ \times ٥\%)$$

$$\{ ٢٠ \}$$

(٢٤) ما حجم قطعة من النحاس كتلتها ١٠٠ غم اذا علمت أن كتلة ٥ سم<sup>٣</sup> من النحاس هو ٤٤,٥ غم؟

$$\{ ١١.٢ \text{ سم}^3 \}$$

{ارشاد: تناسب طردي أو استخدم العلاقة بين الكتلة والحجم والكثافة }

(٢٥) ما النسبة بين الجذر التربيعي للعدد ١٩٦ والجذر التكعيبي للعدد ٩٢٦١ ؟

$$\{ ٢ : ٣ \}$$

(٢٦) كم يتقاضى مسعود من شركة الملابس اذا كان راتبه الشهري ١٥٠ دينار

وعلاوته الشهرية الاضافية ٨ % ؟

$$\{ ١٦٢ \}$$



(٢٧) اذا كان قانون العمل والعمال في احدى البلدان قد حدد عام ٢٠٠٠ م ساعات العمل في الأسبوع هناك ب ٥٠ ساعة، ثم في عام ٢٠٠٥م أعاد تحديد ساعات العمل الاسبوعي ب ٤٦ ساعة، عبّر عن النقص في ساعات العمل على شكل نسبة مئوية.

$$\{ 8\% \}$$

(٢٨) اشترى عدنان سيارة قديمة بمبلغ ١٢٠٠ دينار، وكلفته صيانتها ٣٠٠ دينار وباعها بمكسب ٥% بكم دينار باعها؟

$$\{ 1070 \}$$

(٢٩) بعد أن جهزت أم أروى وجبة العشاء لعائلتها ليلة رأس السنة الميلادية، وجدت أنها اشترت لحمة بمبلغ ٨ دنانير، وأن الوجبة كاملة كلفتها ١٢ دينار، احسب النسبة المئوية لثمن اللحمة بالنسبة للوجبة؟

$$\{ 76.7\% \}$$

(٣٠) اذا كان راتب حمدان الشهري ١٥٠ دينار، ويوفر منه وبصعوبة ٥% كم يوفر في السنة الواحدة؟

$$\{ 90 \text{ دينار} \}$$

(٣١) طبيب أسنان دخله الشهري ٢٠٠٠ دينار يتمتع باعفاءات قدرها ٢٠% من دخله السنوي. فكم دينار يدفع هذا الطبيب ضريبة دخل في السنة اذا كانت نسبتها ١٧%؟

$$\{ 2264 \text{ دينار} \}$$

النسبة والتناسب



(٣٢) توفي أحد الأغنياء وترك زوجة وابن وابنة ومبلغ ٦٠٠ ٠٠٠ دينار، ما نصيب

كل من الورثة من التركة؟

$$\{ ١٧٥٠٠٠ , ٣٥٠٠٠٠ , ٧٥٠٠٠ \}$$

(٣٣) إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  حيث أ، ب، ج، د < صفر

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ يبين أن } \frac{أ}{ج} = \frac{ب}{د}$$

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ وإذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$$

$$\text{يبين } ب^٢ - ج^٢ = (أ - ج)$$

(٣٤) ما العدد النسبي (الكسر العادي) الذي لا تتغير قيمته إذا أضفنا لبطه

العدد ١٨ ولقامه العدد ٢٧؟

$$\left\{ \frac{٢}{٣} \right\}$$

{ ارشاد: استعمل خاصية التناسب إذا كان  $\frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د}$  فإن  $\frac{أ+ج}{ب+د}$  }

(٣٥) تحتاج حنفية ٣ ساعات لماء  $\frac{١}{٤}$  بركة سباحة صغيرة الحجم، كم

ساعة تحتاج الحنفية نفسها لماء  $\frac{٧}{٨}$  البركة المذكورة؟

(٣٦) إذا كان طول سناء ١.٥ متر وطول وفاء ١.٨ متر، ما نسبة طول سناء الى

طول وفاء؟

$$\{ ٦ : ٥ \}$$

(٣٧) اشترت سعاد ٦ أمتار قماش من الحرير بمبلغ ٧٥ دينار، فما ثمن ١٦ متراً

من القماش نفسه؟



### النسبة والتناسب



(٣٨) تقطع طائرة المسافة بين دولتين في زمن قدره ٩ ساعات، اذا كانت سرعتها ٢٠٠ كم/ ساعة، كم ساعة تحتاج لقطع المسافة نفسها اذا أصبحت سرعتها ٣٠٠ كم/ ساعة؟

(٣٩) أعط مثلاً عددياً واحداً يوضح الخاصية التالية للتناسب:

$$\text{اذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ فإن } \frac{أ+ج}{ب+د} = \frac{أ-ج}{ب-د} \text{ حيث أ ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية}$$

(٤٠) رُسم مخططاً لقطعة من الأرض بمقياس رسم ١ : ٢٥ ٠٠٠ فإذا كان طول القطعة على المخطط = ٤ سم وعرضها = ٢ سم. احسب أبعادها الحقيقية بالأمتار.

(٤١) اذا كان  $\frac{٢}{١٠} = \frac{١}{٥}$  فاملأ الفراغات داخل المربعات أدناه:

$$\frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{٥}{١٠}, \quad \frac{\boxed{\phantom{00}}}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{\boxed{\phantom{00}} + ٢}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{٥ + ١}{٥}, \quad \boxed{\phantom{00}} \times ٢ = \boxed{\phantom{00}} \times ١$$

(٤٢) وزعت احدى الجمعيات التعاونية مبلغ ٢٠٠٠ دينار كمعونة على ثلاث عائلات بنسبة ٢ : ٢ : ٥ فما نصيب كل عائلة من هذه المعونة؟

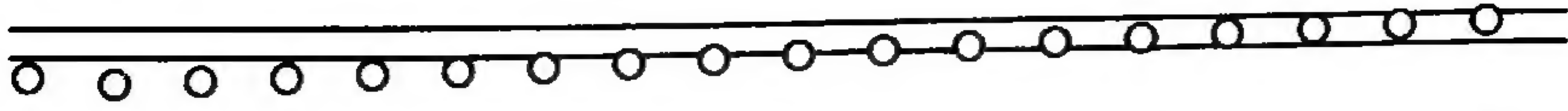
$$\{ ١٠٠٠ , ٦٠٠ , ٤٠٠ \}$$

(٤٣) قسّم المبلغ ٨٤٠٠ دينار الى مبلغين النسبة بينهما كنسبة  $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٥}$

(٤٤) عبّر عن ٠,٠٧٥ بالنسبة المئوية.

$$\{ ٧,٥ \% \}$$





(٤٥) ذهبت سعاد في موسم التتزيلات الصيفية لشراء فستان زاهي الألوان، فإذا كان السعر المكتوب عليه ١٧ ديناراً والتتزيلات ٢٥٪ ، كم ديناراً تدفع سعاد ثمناً للفستان الجميل ذاك؟

{ ١٢.٧٥ }

(٤٦) اذا علمت أن عدد الشركات في احدى الدول العربية ٦٥٠ شركة، مسجل منها ٤٠٠ شركة في غرفة التجارة والصناعة في ذاك البلد، احسب النسبة المئوية للشركات غير المسجلة في الغرفة.

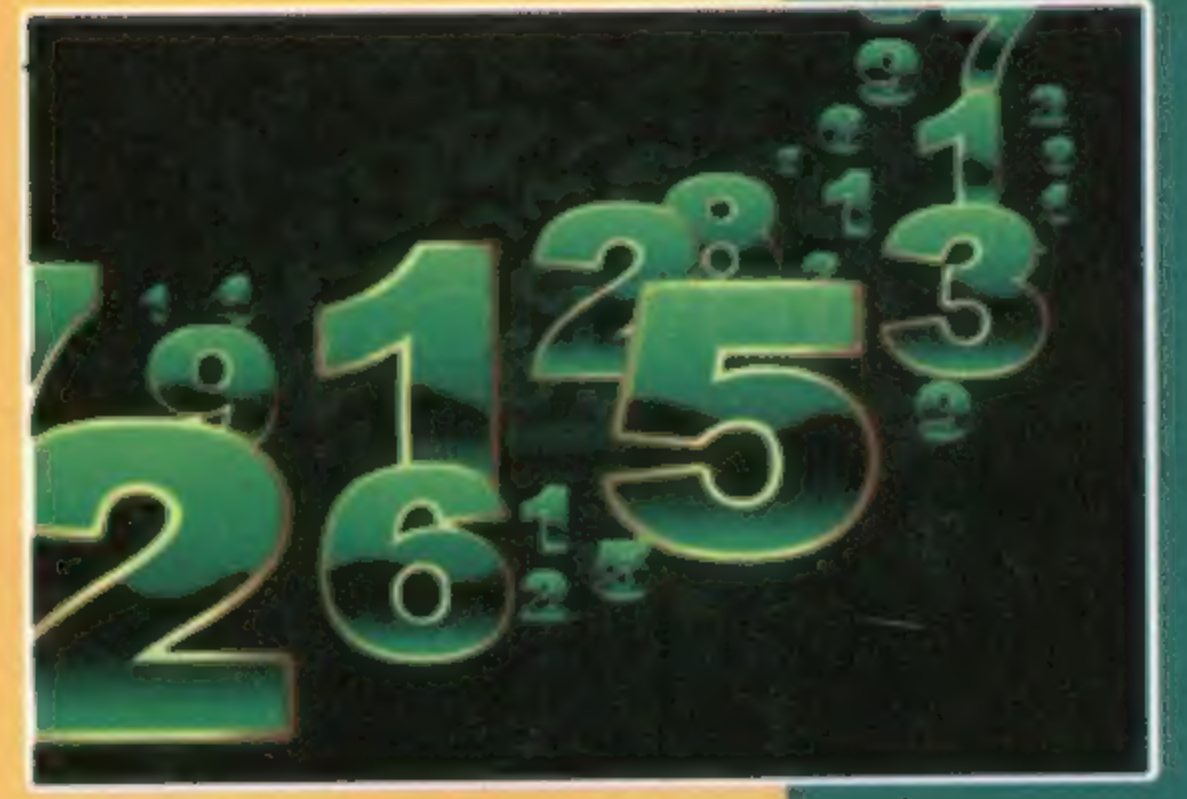
{ ٣٨.٥ ٪ تقريباً }



- (١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.
- (٢) ايرل و . سوكونفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزآن ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.
- (٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزآن، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.
- (٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والإدارية" مكتبة بغداد - عمان ، ١٩٩٤ م.
- (٥) شارلز سولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت - ١٩٨١ م.
- (٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزآن، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.
- (٧) عايش زيتون "أساسيات الإحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.
- (٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزآن، دار الفرقان للنشر والتوزيع - عمان ، ١٩٨٢ م.
- (٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الإحصاء" ، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.
- (١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.
- (١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.
- (١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا - موسكو، ١٩٧٥ م.
- (١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزآن، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣ م.
- (١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.
- (١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.
- (١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.
- (١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.
- (١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.







## الرياضيات الشاملة

المجموعات والأعداد - النسبة والتناسب

Bibliotheca Alexandrina



1213167



للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658252 / 00962 6 5658253

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: [darosama@orange.jo](mailto:darosama@orange.jo)

الموقع الإلكتروني: [www.darosama.net](http://www.darosama.net)